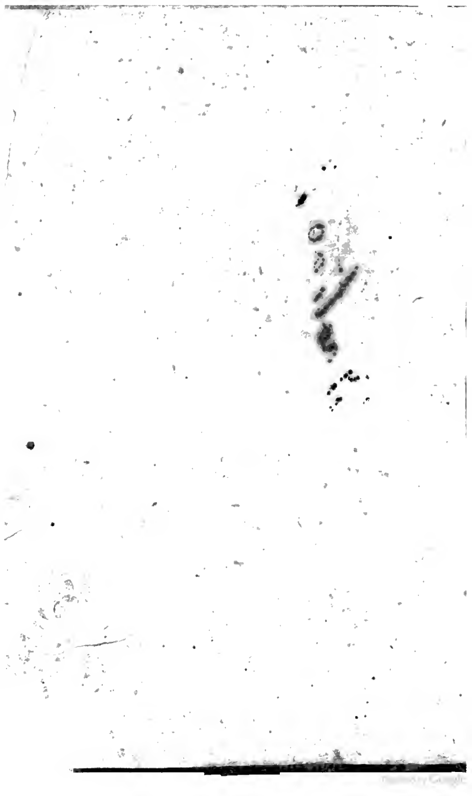


NOVA
STATICES
ELEMENTA.



Johañes Alvarus inv. & sc.

ELEMENTA STATICES

IN TYRONUM GRATIAM

tumultuario ſtudio

CONCINNATA,

AUCTORE

NICOLAO DE MARTINO

In Illuſtri Lyceo Neapolitano

MATHEMATUM PROFESSORE.

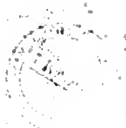






NEAPOLI MDCCXXVII.
Typis, & expenſis Felicis Moſca,
Superioribus annuentibus.





PRÆCLARISSIMO VIRO

NICOLAO CYRILLO

In Illuſtri Lycæo Neapolitano

PRIMARIO MEDICINÆ PROFESSORI.



Uum primum cogitatio mihi ſubiit, edendi in commodum, & uſum ſtudioſæ noſtræ Juventutis Elementa iſta Statices, ſtatim ad quærendum ex more Patronum aliquem, ſub cu-

jus auspiciis tutò possent lucem adspicere, Animum appuli. In eo autem inveniendo non adeo laboravi. Subinde enim Nomen Tuum, Vir Eximie, Academiæ, Genti, & Ævo singulari est planè ornamento, ut illicò Tui sese mihi obtulerit contemplatio, ubi rem istam Animo mecum revolvebam. Illud potius pertimescendum mihi esset, nè vitio mihi verteretur, quòd Tantum Virum exiguo isto libello, non aliâ forsitan re, quàm argumenti sui magnitudine, commendando, auserim compellere. Neque enim adeò hebes à Natura ingenium nactus sum, ut ipse quoque non videam, opusculum istud longè infra tuam dignitatem subsistere. Namque, sive solidam reputem rerum, qua polles, cognitionem, non ullis coarctatam terminis, sed adeò

adeò latè patentem, ut ea, quæ à munere tuo procul esse videntur, primum in illa locum obtineant; sive præclaras animi tui dotes considerem, quæ tales, tantæque sunt, ut ad eas pro dignitate pertexendas vix primi Oratoris vires sufficerent: non possum candido non pudore suffundi, quod præsens Opusculum Nomini Tuo dicatum in lucem depromam. Et ultrò quidem à tanto conatu destitissem, nisi ad id audendum me impulisset summa humanitas tua, qua factum, ut posthabitis gravioribus curis non dedignatus es Opusculi hujus primas paginas oculis, & animo perlustrare. Neminem etenim latet, quòd sicuti in humanis, quas vocant, litteris eos omnes, qui hoc nostro Cœlo suum illis dedere

nomen , longè antecellis ; ita & humanitate Te ipsum vincas , ac superes . Et hoc quidem argumento cuique esse potest , eam, quam profiteris , eruditionem , non fictam esse , ac simulatam, sed veram , ac solidam , dignamque Viro , qui Christiani Nominis mensuram gestit implere. Neque enim ex eorum numero es , qui statim ac è Vulgi sordibus sunt educti , & totâ Urbe probatos se esse sentiunt, non omnium Hominum sustinent adspectum , refugiuntque illos , quos sibi ipsis indignos esse mendosè putant , tristi etiam supercilio eosdem intuentur ; quin tanta in Te est comitas , tanta benignitas , ut nemo tam humilis existat , cui ad consuetudinem , & familiaritatem tuam facilis accessus , aditusque non pateat . Argumentum etiam ipsius

jus Opusculi non leviter me impulit, ut Tuum ei Nomen inscriberem: nempe quòd Sanioris Philosophiæ specimen exhibens, nequeat Tibi gratiæ, & oblectamento non esse. Neminem quippe Gentium latere arbitror, quantum Operæ illustrandæ Philosophiæ Naturali quotidiè conferas, dum publicis tuis prælectionibus, non modò illam à barbarie vindicare, sed eandem ita quoque cum Mathesi conjunctam ostendere studes, ut satis sit Te ex Cathedra prælegentem audire, quò cuique pateat, immane quantum Mathesis Naturalibus conducat Disciplinis. Id testatur maximus ille ardor, qui in illustri nostro Lyceo circa Disciplinas Mathematicas nostris hisce temporibus studiosæ incessit Juventuti: Neque enim aliunde na-

ta

ta cupido illa, quàm quia Naturalem Philosophiam ex Mathesi unicè pendere cunctis in diem ostendis. Sed & nostra res hasce pertractandi ratio, quam novi Tibi non displicere, in caussa quoque fuit, ut Tui Nominis splendore libellum istum, undique tenebris circumseptum, auserim illustrare. Etsi enim naturæ arcana nullo modo rimari Nos posse, nisi Matheseos beneficio, & Tibi, & aliis persuadeas; eos tamen, qui caussis physicis omninò neglectis, ad Mathesim toti confugiunt, haud æquo animo ferendos esse arbitraris, ut qui non tam Philosophiam Naturalem tradere, quàm Mathesim ipsam abstractam, & à rerum natura praecisam excolere videntur. Id igitur vitii quum ex ipsa Tui sententia studuerim in hoc

Opuscu-

Opuſculo præcavere, facile Auctor ipſe mihi fui, laborem hunc meum non adeò fore Tibi diſpliciturum, nec adeò Te mihi ſuccenſurum, quod Nomen Tuum præſeferat. Cæterùm, ſi hac in re ſummoperè à me peccatum exiſtimes, memoria recolas velim, maximam culpæ partem Te ipſum ſuſtinere, ut qui rerum optimarum æſtimator quidem eximius, nugis noſtris paulò impenſiùs faves. Vale.

Tui

Addictiſſimus Famulus
Nicolaus de Martino.

EMINENTISSIMO SIGNORE

Felice Mosca, supplicando, espone à V.E., come desidera dare alle stampe un' Opera Matematica intitolata: *Elementa Statices in Tyronum gratiam conscripta*; composta dal Sig. D. Nicolò di Martino, Publico Lettore di Matematica in questa Università di Napoli. La supplica per tanto à commettere la Censura di essa à chi meglio li parerà, e l'averà à grazia, ut Deus.

Rev. D. Joseph Bonocore Philosophiæ, & Matheseos Prælector in Venerabili Seminario Archiepiscopali, revideat, & referat. Neap. 23. Februarii 1726.

ANTONIUS CANONICUS CASTELLI VICARIUS GENERALIS.

D. P. M. Giptius Canonicus super editione librorum Deputatus.

EMI-

EMINENTISSIME DOMINE

Quod mihi imperasti, ut nova hæc *Elementa Statices in Tyronum gratiam conscripta* perlegerem, id eâ, qua potui, diligentiâ executus sum. Nihil equidem in iis inveni, quod vel Religioni, vel moribus Christianis adversetur; multa verò, quibus non Tyronum modo ingenia excolantur, sed etiam oblectentur eorum, qui se diu multumque in ejusmodi studiis exercuerunt, ob summam in rebus difficillimis perspicuitatem cum brevitate doctissimi Auctoris miro studio, industriâque conjunctam. Quamobrem è re publicâ esse maximè censeo, si typis edita divulgentur, nisi tamen Eminentiæ Tuæ aliter videatur. Ex Ædibus Seminarii. ix. Cal. Martias.

Eminentiæ Tuæ.

Addictiss. atque obsequentiss. Servus
Joseph Buonocore.

Attenta supradicta relatione Imprimatur.
Neap. 22. Maji 1726.

ANTONIUS CANONICUS CASTELLI
VICARIUS GENERALIS.

D. P. M. Giptius Can. Dep.

EMI-

EMINENTISSIMO SIGNORE.

Felice Mosca, supplicando, espone à V. E., come desidera dare alle stampe un' Opera Matematica intitolata: *Statices Elementa in Tyronum gratiam conscripta*, composta dal Sig. D. Nicolò di Martino, Publico Professore di Matematica in questa Regia Università di Napoli. La supplica per tanto à commettere la Censura di esso à chi meglio li parerà, e l'averà à grazia ut Deus.

Rev. D. Jacobus Grazini videat, & in scriptis referat.

MAZZACCARA REG. ALVAREZ REG.
PISACANE REG. CRIVELLI REG.
VENTURA REG.

Provisum per S. E. Neap. die 26. Martii 1726.

Rinaldus.

EMINENTISSIME PRINCEPS.

Opus Mathematicum Elementorum Statices compositum à D. Nicolao de Martino in nostro Lyceo Matheseos Antecessore mihi Eminentiæ Tuæ Imperio censuræ causa commissum, dignum profecto est,

est, ut in bonum cupidæ Scientiarum Juventutis, cui dirigitur, & in Civitatis hujus ornamentum in publicam lucem exeat. In eo enim, non solum nihil continetur, quod Principis jura, bonosque mores lædat, sed à Præstantissimo Auctore ità illustriora superioris, & hujus ævi inventa Staticam Scientiam spectantia suis verè sublimibus excogitatis concinnè copulantur, ut methodi mirabili uniformitate, & perspicuitate ab una eâdemque Mente omnia primitùs prodiisse videantur. Opus præterea absolutissimum est, ut non tantùm elementi, quemadmodum modestissimus Auctor scripsit, sed Staticæ Disciplinæ plenissimi commentarii loco haberi mereatur. Neapoli die 28. Aprilis. 1626.

Addictissimus famulus
Jacobus Grazini.

Visa dicta relatione imprimatur, verùm in publicatione servetur Regia Pragmatica.

ALVAREZ REG. PISACANE REG.
CRIVELLI REG. THOMASI REG.
VENTURA REG.

Provisum per S.Em. Neapoli die 29. Januarii 1727.

Rinaldus.

AD

AD LECTOREM.

Quamquam, Benevole Lector, Typorum correctioni Egomet operam dederim, adhuc tamen in Opusculi hujus æditionem sphalmata nonnulla irrepserunt. Quæ mihi inter legendum sese obtulere, ea sunt, quæ sequuntur; sed alia fortaße erunt, quæ Mihi, rebus potiùs, quàm verbis attento, nequaquam innotuerunt. Itaque, quemadmodum ista ut calamo corrigere velis, Benigne Lector, priusquam Opusculi lectionem aggrediaris, etiam atque etiam rogo; sic alia humanitati tuæ corrigenda relinquo.

Pag. 7. lin. 15. *pro* resolutione *leg.* revolutione.

Pag.12.lin.2.*pro* A. *leg.*C.

Pag.64.lin.18. *pro* Philosopi *leg.*Philosophi.

Pag.65. lin. 21. *pro* perseverandi *leg.* prosequendi.

Pag.75.lin.3. *pro* PRV.*leg.*PRO.

Pag.131.lin.15.*pro* MNO *leg.*MON.

Pag.134.lin.3.*pro* MNO *leg.*MON.

Pag.229.lin.2.*pro* CD.*leg.*cD.

Pag.241.lin.18.*pro* B.*leg.*A.

Pag.472.lin.30.*pro* AM *leg.*AP.

PRÆ-

PRÆFATIO.



NIversam Phisiologiam ex Mathesi unicè pendere, nec naturæ arcana ullo modo rimari posse, nisi Matheseos beneficio, notius est, quàm ut possit inficiari: & præsertim nostris hisce temporibus, in quibus missis, non modò formis substantialibus, & rerum qualitatibus occultis, in quibus posita erat summa Philosophiæ Scholasticæ, ab Aristotele, & Arabibus derivatæ, verùm etiam fictis, & inanibus hypothesibus, quibus plus æquo indulgebant Cartesiani, singula naturæ phænomana ad leges mathematicas exiguntur.

Veritatem istam nòrunt ipsimet Veteres, quippe qui, si Pappo præstanda fides, in rerum naturalium investigatione plurimi Mechanicam faciebant: potissimum autem magnus Archimedes, qui præter geometrica sui monumenta, nullo non tempore celebranda, & quamplurima inventa mechanica, quæ magnum ei nomen apud Regem Syracusanum compararunt; scripsit etiam libros de æquiponderantibus, & insi-

dentibus humido, in quibus Statices, Hydrostaticesque rudimenta reclusit, & ex quibus omnis sanior Phisiologia est deducenda.

Verùm enim verò præclara ab Archimede in Philosophiam Naturalem sparsa semina diù sterilia jacuere, usque dum Galilæus Galilæi, Magni Hetruriæ Ducis Mathematicus Celeberrimus, illa eadem fæcundata ad auras revocavit. Nam reseratis rursus clavi geometricâ naturæ claustris, non aliam philosophandi rationem Lynceus iste Philosophus sectandam sibi proposuit, quàm quæ mechanicis innitur fundamentis. Unde non modo Principia Archimedea luculenter exposuit, sed novam quoque sibi condidit de motu scientiam, veramque itidem methodum Philosophis aperuit, qua rerum causæ mechanicæ sint indagandæ.

Et quidem, tametsi Veteres summoperè Mechanicam excoluerint, ejusque fructus uberrimos, non in vitâ civili tantum, verùm etiam in rebus naturalibus deguftaverint; vastissimæ tamen scientiæ de motu corporum, ad ritè philosophandum apprimè necessariæ, non alius velut Antesignanus haberi debet, quàm Galilæus Galilæi. Fatebantur etenim Veteres, naturam esse principium motus, & quietis; atque adeò ignorato motu, naturam ignorari. Verùm circa motum solum fermè nomen ipsis innotuit, inde-

indeque factum, ut nec etiam genuina Mechanices principia in comperto habuerint.

Primus itaque Galilæus ſcientiam iſtam de motu tradere aggreſſus eſt. Sed Mathematicorum more neglexit quæſtiones illas abſtractas, ex quibus nullus in rebus phyſicis uſus eruitur, quæque potius ad Metaphyſicam ſunt relegandæ; cujuſmodi ſunt illæ, quæ pertinent ad naturam, & originem motus. Quid enim ſit motus, maluit ſupponere, quàm accuratâ definitione proſequi. Eſt quippe motus ex earum rerum numero, quas nemo non intelligit; ſed quas velut ſimplices, & in ſuo genere primas nemo poteſt accuratè definire.

Similiter, neque etiam cauſam, ſive originē motus inquirere ſtuduit. Enim verò ad agendum more mathematico de motu corporum, ſatis eſt, quod detur, aut dari poſſit motus in hac univerſitate rerum. Et quãquam nonnulli eò pervenerint inſaniæ, ut motum omnem, tamquam rem impoſſibilem, à corporibus ſuſtulerint, & argutias quaſdam propoſuerint, quibus illius impoſſibilitatem adſtruere ſibi viſi ſunt; digni tamen ſunt potius, ut riſu excipiantur, quàm ut iis refellendis tempus teratur inutiliter.

Jam motus omnis, vel eſt æquabilis, vel variabilis. Dicitur motus æquabilis, cujus quantitas eadem perpetuò manet; dicitur

variabilis, cujus quãtitas mutatur indefinẽter. Interim Galilæus aperuit quidem nobis principaliora motus æquabilis symptomatã; verum quantum ad motum variabilem, rem non generaliter pertractavit; sed ejus tantùm variabilis motus affectiones erudito orbi impertivit, qui æqualibus temporis particulis æqualia patitur velocitatis incrementa, vel decrementa, quemquę proinde motum æquabiliter acceleratum, vel retardatum appellavit.

Nimirum existimabat Vir Clarissimus, vim, quam dicimus gravitatis, agere in corpora gravia eãdem semper, & constanti ratione; adeòque motum gravium esse æquabiliter acceleratum in descensu, æquabiliter retardatum in ascensu. Quocirca, etsi tam accelerati, quàm retardati motus infinitæ esse possint variationes; quia tamen in hac rerum universitate locum tantum habere credidit motum æquabiliter acceleratum, vel retardatum: hinc factum, ut de istâ tantùm specie motus variabilis agendum sibi proposuerit.

Non abludere autem à vero istiusmodi hypothesim, quòd vis gravitatis agat in corpora gravia eâdem semper, & constanti ratione; confirmarunt deinde experimenta tum ipsius Galilæi, cùm Hugenii, & Ricciolii. Unde, etsi Veteribus innotuerit, gra-

via

via inter descendendum naturalem suum motum accelerare, quum illud satis superque quotidiana edoceat experientia; attamen, quòd motus ille subinde acceleretur, ut spatia æqualibus temporibus descripta sint velut numeri impares, ab unitate se consequentes, eademque ab initio motus computata sint in duplicatâ temporum ratione: id quidem feracissimo Galilæi ingenio debetur.

De motu porrò gravium egit Galilæus, tam quum descendunt per plana verticalia, sive recta ad horizontem, quàm quum descendunt per plana utcumque ad horizontem inclinata. Et quamquam in demonstrandis legibus descensus per plana inclinata supposuerit, gradus velocitatis ejusdem mobilis, per diversas planorum inclinationes acquisitos, tunc esse æquales, quum eorundem planorum elevationes, seu altitudines æquales sunt; non defuerunt tamen deinceps Viri præstantissimi, qui principium istud suâ etiam ratione demonstrarunt, & Galilæi adeò doctrinam de descensu gravium ab hac labe vindicarunt.

Præterea idem Galilæus aperuit etiam leges descensus, quum grave corpus vi gravitatis fertur per plura plana contigua, diversimodè ad horizontem inclinata; verùm in hypothesi, quod concursus planorum non

impediat motum gravis descendentis; sed tantùm ejus directionem mutet. Interim, quia hypothesis ista multum abest, ut tutò possit in Physicam admitti; ab eâ discessit Clarissimus Varignonius, rationemque determinavit, quam velocitas in descensu per planum primum acquisita habet ad eam, cum qua ingreditur planum alterum: nempe quòd sit, ut radius, sive sinus totus ad sinum complementi ejus anguli, quem mutuo occursu plana constituunt.

Ex doctrinâ de descensu gravium plura alia collegit Galilæus, eaque Veteribus prorsus ignota. Nimirum primò leges, quæ observari debent in motu pendulorum, per arcus circulares oscillantium, puta quòd pendulum eundo, & redeundo continuas oscillationes perficere debeat; quòd velocitas penduli in puncto infimo sit, ut subtensa arcus, quem descendendo describit; quòd tempora oscillationum duorum pendulorum, in similes arcus excurrentium, sint in subduplicatâ ratione suarum longitudinum; & denique, quòd ejusdem penduli vibrationes exiguæ, etsi inæquales, ad sensum sint isochronæ, sive æquidiuturnæ.

Postremæ legis beneficio adhibuit primus omnium Galilæus pendula in observationibus physicis, & astronomicis, quæ accuratam temporis mensuram requirunt. Ejus exem-

exemplo ductus Hugenius horologia ipsa automata pendulis extruxit, & experientia comprobavit, ejuscemodi horologia longe superare priora illa, quorum libratores horizontales erant. Sed quoniam talibus horologiis neque etiam exacta temporis mensura haberi poterat, novum protulit horologiorum genus laudatus Hugenius, faciendo nempe, ut grave pendulum non per circuli circumferentiam, sed per cycloidis perimetrum ferretur.

Etsi enim ejusdem penduli oscillationes exiguæ ferè, & ad sensum sint æquidiuturnæ; attamen, quia non sunt omnimodè, ac geometricè tales, semper erit inter singulas oscillationes exigua aliqua differentia, nec proinde pendulorum motu circulari exactè tempus potest mensurari. Unde, quum demonstraverit Hugenius, tempora descensus per arcus cycloidis, cujus vertex est punctum imum, inter se æqualia esse; collegit exinde isochronas esse pendulorum oscillationes omnes, si utique non in circumferentiæ circuli, sed in cycloidis arcubus perficerentur: proindeque eò vires omnes intendit, ut methodum excogitaret, qua mediante posset grave pendulum per cycloidis perimetrum ferri.

Id eum manuduxit ad doctrinam de lineis evolutis, quæ Curvarum Geometriam

mirum in modum locupletavit. Inde enim innotuit Geometris, lineas curvas non modò considerari posse, velut polygona laterum infinitorũ, quorum unumquodque esset indefinitè parvum; verùm etiam velut aggregata infinitorum arcuum, qui omnes sint indefinitè parvi, & ad totidem circulos diversos referantur. Fœcunda sanè principia, ex quibus velut ex fonte uberrimo curvarum proprietates omnes prono alveo profluunt, & quorum ope admiranda problemata summâ solertiâ resolvuntur!

Ex doctrinâ de descensu gravium collegit etiam Galilæus ea, quæ ad motum spectant projectorum. Etsi enim nemo ex Veteribus non viderit, gravia dum ab impellente manu projiciuntur, non rectam, sed curvam lineam describere; nemo tamen naturam illius curvæ determinavit. Primus itaque Galilæus eam definire aggressus est, & ex cognitâ gravium acceleratione collegit curvam, quam projecta describunt, illam ipsam esse, quam parabolam Veteres appellarunt: unde postea omnia, quæ pertinent ad projectorum motum, nullo negotio geometricè definivit.

Galilæo etiam debetur doctrina de resistentiâ solidorum, tum horizontaliter, cùm verticaliter suspensorum. Constat nempe experientiâ, machinas, quæ in parvis ela-

elaboratæ, felicem obtinent eventum, in magnis eâdem proportione constructas, non æquè feliciter effectus suos sortiri. Id communiter rejiciebatur in defectus inevitabiles artis manualis, qui sæpesæpiùs veram, solidamque rerum theoriam apud vulgus hominum miserè dedecorant. Sed observavit Galilæus, diversitatem istam longè majorem esse, quam quæ ex solâ istâ causâ repeti posset. Itaque aliud quidpiam adesse conjecit, ex quo illa esset differentia deducenda: id, quod dum sedulò perquisivisset, pervenit tandem ad doctrinam de resistentiâ solidorum, Physicis ante ipsum penitus incognitam.

Hujusmodi doctrinam prosecutus est deinceps paulò fusius Celeberrimus Galilæi Discipulus, Vincentius Viviani, in quodam opere suo posthumo, quod perfecit, notisque suis illustravit Abbas Guido Grandius in Pisano Lyceo Mathematum Professor Eximius. Sed quoniam, tam Galilæus, quàm Discipulus ejus suppofuerunt, fibras sectionis æqualiter tendi, tam in suspensione solidi verticali, quàm quum idem solidum suspenditur horizontaliter; considerarunt Clarissimi Viri Leibnitius, & Mariottus fieri posse, ut id nequaquam sit verum. Unde doctrinam istam de resistentiâ solidorum ad majorem perfectionem perduxerunt;

runt; quandoquidem posuerunt, tensiones fibrarum æquales esse in suspensione verticali, sed esse proportionales distantiis suis ab hypomochlio in suspensione horizontali.

In eâdem doctrinâ de resistentiâ solidorum illud etiam consideravit Vir Acutissimus Jacobus Bernoullius, fieri nimirum posse, ut non omnes fibræ sectionis, in qua vis resistentiæ consideratur, tendantur, sed superiores quidem tensionem, inferiores verò pressionem patiantur. Atque hæc consideratio, haud equidem contemnenda, manuduxit eum quoque ad contemplationem novi cujusdam centri, de quo nemo adhuc cogitaverat. Enim verò, quum fibræ superiores extensionem, compressionem inferiores patiantur; aderit proculdubio inter eas fibra aliqua, quæ nec tensionem subibit, nec pressionem. Unde punctum sectionis, ex quo egreditur fibra ista, centrum tensionis Vir Acutissimus vocitavit.

Non inficior, Galilæum in nonnullis rebus particularibus humanam imbecillitatem ostendisse; veluti quum credidit, lineam celerrimi descensus esse circumferentiam circuli, & laminam elasticam, perinde ac funem, vel catenulam, flecti in curvam parabolicam. Sed hujusmodi sphalmata Viro summo nequaquam vitio vertenda sunt,

mul-

multumque abest, ut nomen ejus, ac gloriam minuere possint. Enim verò Galilæi temporibus profundissimâ adhuc caligine tecta latitabat methodus indefinitè parvorum, quæ sola subtilioribus hisce speculationibus felicem aditum præbet.

Innotuit quippe Geometris, lineam celerrimi descensus esse cycloidem, idque per Clarissimos Viros Newtonum, Leibnitium, Hospitalium, & Bernoullios Fratres, postquam comperti fuerunt calculus differentialis, & integralis, quibus prædicta indefinitè parvorum methodus administratur. Nec nisi iisdem calculis mediantibus licuit etiam laudatis Fratribus Bernoulliis, ex omnibus cycloidibus, quæ incipientes ab eodem puncto, secent eandem rectam positione datam, sive verticalem, sive utcumque ad horizontem inclinatam, determinare eam, per quam grave corpus descendendo perveniat à dato puncto ad datam illam rectam tempore brevissimo; hocque problema extendere etiam in casu, quum linea positione data, non est recta, sed curva quævis geometrica, quumque loco cycloidum dantur curvæ aliæ similes inter se.

Ejusdem methodi beneficio determinarunt quoque Geometræ post Galilæum natum, tam curvæ elasticæ, quàm curvæ catenariæ: comperientes etiam, illam eandem

esse

esse cum curvâ lintei, quam scilicet induit linteum stagnante aliquo liquore homogeneo compressum; quotiescumque vires laminam tendentes proportionales sunt ipsis tensionibus; istam eandem cum curvâ velariâ, hoc est cum eâ, in quam velum vento tumidum flectitur, in hypothesi, quod catenula sit gravitatis uniformis, graviumque directiones sint parallelæ. Unde mirari non subibit, quòd in hisce speculationibus deceptus fuerit magnus Galilæus: nempe quia vulgari Geometriâ, quæ Galilæi tempore sola obtinebat, hæc perscrutari omnino impossibile est.

Quantum ad motum fluidorum, scilicet Hydrostaticam, non aliud fere Galilæus tradidit, quàm quod docuit Archimedes in tractatu de insidentibus humido. Verùm, quum singulare phœnomenon, ab Olitore quodam acceptum, Philosophos edocuerit, aquam in antliis tractoriis ultra octodecim cubitorum altitudinem attolli non posse; non tantùm Torricelliani tubi peperit experimentum, verùm etiam ansam dedit, ut Hydrostatices principia ad aerem traducerentur, novaque adeò scientia conderetur, quæ Aerostatices nomine potest insigniri.

Quum enim Evangelista Torricellius, apud Magnum Hetruriæ Ducem in munere mathematico Galilæi successor eximius,

phæ-

phænomenon illud sedulò mente revolverit, pro eo, quo erat, mentis acumine conjecit, limitatam illam duodeviginti cubitorum altitudinem in antliis tractoriis non aliunde oriri posse, quàm à determinatâ atmosphæræ pressione: qua de re ut certior fieret, cum hydrargiro rei periculum fecit, & ut conjecit, omninò respondit eventus. Sed hoc idem pleniùs deinde confirmarunt Viri Celeberrimi Pascalius, Boylius, Borellus, & Mariottus, quorum opera notiora sunt, quàm ut hic à Nobis recenseri debeant.

Circa aerem porrò, non modò illud innotuit, eum grave esse, atque adeò legibus fluidorum gravitate suâ agentium subjici debere, verùm etiam peculiarem habere affectionem, quam nequaquaquam sibi vindicant fluida reliqua: nimirum vi elasticâ præditum esse, qua non solùm continuò se expandere conatur, sed ad majus, quam antea occupabat, spatium reapse se expandit, ubi nullo corpore ambiente impeditur; ut ostendunt experimenta quamplura à Boylio, Mariotto, Jacobo Bernoullio, aliisque cautis observatoribus tentata, & fœliciter ad exitum deducta.

Hisce autem experimentis non solùm constitit, aerem vi elasticâ præditum esse, sed innotuit etiam hanc vim expansivam aeris

aeris eò majorem esse, quò major est aeris densitas; & vicissim eò minorem, quò densitas aeris est minor. Unde eò vires omnes intenderunt Viri præstantissimi, ut rationem indagarent, quæ est inter aeris elasticitates, & ejus densitates; multisque accuratis experimentis comperierunt, densitates aeris viribus comprimentibus, hoc est elasticitatibus ejus quam proximè proportionales existere.

Hæc igitur omnia, ad scientiam de motu pertinentia, Galilæo debentur. Sed ultro adhuc eadem de motu scientia à subsequentibus Geometris evecta fuit. Ad leges quippe, quæ in mutuâ corporum collisione observantur, nequidem respexit Galilæus. Eas itaque definiendas susceperunt Clarissimi Viri Johannes Wallisius, Christophorus Wrennus, & Christianus Hugenius, tam pro corporibus inertibus, quàm pro corporibus elasticis, sive actuosis. Etsi enim ante hos suas quoque leges in occursu corporum observandas proposuerit Cartesius, ab iis tamen ipsi ejus Discipuli discesserunt; quandoquidem eas collegit ex duobus principiis, quæ cum ratione, & experientiâ pugnant omnino: nempe quòd corpora propter quietem vim habeant ad resistendum; & quòd in corporibus congredientibus eadem semper perseveret quantitas motus.

SI-

Similiter, etsi de motu pendulorum egerit Galilæus, nonnisi tamen pendula simplicia consideravit. Nam doctrina de motu pendulorum compositorum, quæ eò tota redit, ut inveniatur centrum oscillationis, hoc est longitudo penduli simplicis, composito isochroni, Christiano Hugenio tota debetur. Etsi enim problema istud de inveniendo centro oscillationis celebre fuerit inter Geometras usque ab ætate Cartesii, perfectam tamen, ac generalem ejus solutionem primus litterario orbi communicavit laudatus Hugenius, quam deinde excoluerunt magis, & ab omni scrupulo vindicarunt Bernoullii Fratres, & post eos Hermannus in suâ Phoronomiâ.

Corpora, quæ in orbem revolvuntur, recedere conari à centro motus per tangentem, id quidem suboluit Galilæo; verum leges istius conatus centrifugi, saltem in eo casu, quum corpora motu æquabili, ac uniformi circulariter moventur, idem Hugenius primum aperuit, ex quibus etiam collegit insignia quædam theoremata circa motum conicum pendulorum. Et quamquam hæc omnia sine ulla demonstratione impertiverit erudito orbi in calce sui tractatus de horologio oscillatorio; ipsas tamen Auctoris demonstrationes adspexit Respublica litteraria in suis operibus post-

humis

humis, in quibus peculiare de vi centrifugâ Opusculum habetur.

Circa corpora, quæ in gyrum aguntur, aliam contemplationem instituit Isaac Newtonus: nimirum, quòd sicuti ea per vim centrifugam recedere conantur à centro motus in quolibet orbitæ puncto per rectam, quæ orbitam in puncto illo contingat; ita in iis adesse debeat vis alia æqualis, & contraria, per quam vicissim retineantur in suis orbibus, quæque impediat, ne abeant per tangentes. Hanc aliam vim ipse Newtonus vocavit centripetam, quia nempe per ipsam corpora petunt continuò punctum aliquod, tanquam centrum, veluti in projectis est vis gravitatis, per quam flectuntur in terram. Sed alii post ipsum eam vocarunt centralem: quo nomine ipsa etiam vis centrifuga potest designari.

Itaque de hisce viribus centripetis sibi potissimum proposuit agendum Newtonus in Principiis suæ Philosophiæ Mathematicis: qua ratione dici equidem pro dignitate non potest, quantum disciplinæ de viribus, & motibus corporum pomeria dilataverit. Quæcumque enim docuit Galilæus circa descensum gravium, & motum projectorum in hypothesi gravitatis constantis, & uniformis, conatu inaudito ad suam generalitatem evexit, & cujusmodi ea esse debeant in qua-

quacumque gravitatis hypothesi mirâ solertiâ definivit.

Demonstravit quippe Galilæus, gravia, dum descendunt, æquabiliter accelerari, hoc est æqualibus temporis particulis æqualia velocitatis incrementa nancisci; itemque spatia, quæ percurrunt, computata ab initio motus, esse ut quadrata, tum temporum, cùm velocitatum: verum id in hypothesi, quòd urgeantur vi centripetâ, sive gravitatis uniformiter agente. At Newtonus proportionem inter spatia, velocitates, & tempora in corporibus rectà descendentibus determinavit, quæcumque esset lex vis centripetæ, sive gravitatis, qua ipsa corpora urgentur.

Similiter Galilæus demonstravit, projecta motu suo describere debere lineam parabolicam; verum id in hypothesi, quod directiones gravium sint parallelæ, ipsaque gravitas sit constans, & uniformis. Sed Newtonus curvam, à projecto describendam, definivit in quacumque virium centripetarum hypothesi. Et sicuti ex ostensis à Galilæo notum erat, vim, quæ requiritur ad describendam lineam parabolicam, directionibus existentibus parallelis, debere esse constantem, & uniformem; sic Newtonus generalem methodum protulit, determinandi vires, quibus circa datum punctum in

curvis datis projecta corpora moveri possint.

Neque modo egit Newtonus de motibus corporum, quæ viribus urgentur, tendentibus ad immobile centrum; verùm etiam casum consideravit, quum corpora viribus centripetis se mutuò petunt, moventurque adeò in orbibus, quorum axes angulari motu prorsum, vel retrorsum feruntur. Atque ex his porrò omnibus verum Systema Astronomicum nobis delineavit. Nam & stellarum motus, orbitas, & periodos explicavit; & motuum lunarium inæqualitates ad calculum posuit; & principia nobis aperuit, quibus par illud miraculorum naturæ, nempe miranda cometarum phænomena stupendusque ille maris accessus, & recessus certitudine tantùm non mathematicâ intelligi possint, ac explicari.

De iisdem viribus centripetis agendum susceperunt quamplures alii post Newtonum, ut Leibnitius, Bernoullii Fratres, Varignonius, aliique; sed vix quicquam iis addiderunt, quæ primus omnium circa hanc materiam feracissimo suo ingenio protulit Newtonus. Illud hìc reticere nolo, quàm oscitanter nonnulli in vulgus efferant, viribus istis centripetis iterum qualitates occultas Scholasticorum ad auras revocasse præclarissimum Newtonum. Nam etsi,

etſi, dum de iis viribus agit, utatur voce attractionis; non uno tamen in loco diſertis verbis monet Lectorem, ſe vires illas non phyſicè, ſed mathematicè tantùm conſiderare, eaſdemque ſermone philoſophico impulſus veriùs, quàm attractiones vocari debere.

Projectorum porrò motus ſuppoſuit Galilæus fieri in vacuo, ſive in ſpatio non reſiſtenti, quòd nempe motus eorum nec accelerare poſſet, nec retardare. Atque hanc hypotheſim aſſumpſit, non quòd neſciret, ejuſmodi medium reſiſtendi facultate carens apud tellurem noſtram non dari; ſed quia non ſatis videbat, qua ratione Geometriæ legibus mediorum reſiſtentiæ ſubjici poſſent. Id ipſum ſuppoſuerunt Torricellius, Borellus, aliique illius ævi Geometræ Celeberrimi: tantòque lubentiùs ab hujuſmodi mediorum reſiſtentiis animum abſtraxerunt, quòd exiſtimarent, ex earum neglectu, perexiguos errores, vixque ſenſibus perceptibiles ſubnaſci.

Itaque Recentiores præclara Galilæi reperta circa motus doctrinam perfeciſſe, & ad ſuam univerſalitatem revocaſſe non contenti, in id etiam dederunt operam, ut arduam iſtam materiam de motibus projectorum in mediis reſiſtentibus erudito orbi notam facerent, ac exploratam. Nec equidem

res successu caruit. Nam post eximia hæc de re meditata præstantium Virorum Newtoni, Leibnitii, Hugenii, & Wallisii partim sine demonstrationibus edita, & breviter tantùm indicata, partim etiam demonstrationibus munita; pertractavit idem argumentum tam fusè, ac solidè Clarissimus Varignonius in Monumentis Regiæ Scientiarum Academiæ Parisiensis, ut vix habeas, quod in eo possis expetere.

Ad suam quoque universalitatem perduxerunt Recentiores Mathematici doctrinam Hugenii de motu pendulorum isochrono. Enim verò, ubi demonstravit Hugenius, pendulorum oscillationes, ut sint perfectè isochronæ, fieri debere in arcubus cycloidis, cujus vertex est punctum imum; supposuit gravitatẽ agere in pendulum eâdem, & constanti ratione, illudque urgere directionibus parallelis. Verùm, qui Hugenium secuti sunt, de motu pendulorum isochrono pertractarunt in quacumque gravitatis hypothesi: neque modo curvam generaliter determinarunt, in cujus perimetro fieri debeant oscillationes isochronæ ex datâ lege gravitatis; sed & vicissim methodum excogitarunt generalem definiendi legem gravitatis requisitam ad hoc, ut pendulum suas perficere possit oscillationes isochronas in datæ curvæ perimetro.

At-

Atque hac in re illud ſpecialiter detectum eſt, quòd ſicuti in hypotheſi gravitatis conſtantis, & tendentis ad punctum infinitè diſtans, oſcillationes, ut fiant iſochronæ, peragi debeant in perimetro cycloidis, cujus vertex ſit punctum imum; ita in hypotheſi gravitatis, directè proportionalis diſtantiæ à centro virium, neceſſe ſit, ut fiant in perimetro epicycloidis internæ: ob elegans iſtud theorema, jampridem oſtenſum à Newtono, quòd vertice epicycloidis internæ deorſum ſpectante æqualia ſint tempora deſcenſus per quoſvis ejus arcus ad verticem terminatos, quotieſcumque grave deſcendens viribus urgetur, quæ undique tendentes ad centrum circuli immobilis, proportionales ſunt diſtantiis ab eodem centro.

Nec ſilentio reticebimus præclarum illud problema, Geometris à Leibnitio propoſitum, de inveniendâ lineâ, juxta quam ſi corpus deſcendat temporibus æqualibus æqualiter tellurem verſus accedat, & ſolutum tum ab ipſo Leibnitio, cùm ab Hugenio, & Bernoulliis Fratribus, comperientibus ſeorſim, quæſitam curvam eſſe ſecundam parabolam cubicam, modò eam corpus deſcribere incipiat eâ velocitate, quam ſibi comparaſſet, ſi utique rectâ deſcendiſſet per altitudinem, quatuor nonas partes parametri ejus parabolæ adæquantem: ita, ut pro-

blema sit impossibile, si requiratur, ut corpus motum in tali lineâ, descensum suum inchoet à quiete.

Atque hoc sanè problema eò magis memoratu dignum est, quod novis difficultatibus involutum rursus ab eodem Leibnitio Geometris propositum fuerit. Quemadmodum enim ejus Illustris Auctor primâ vice quæsivit, ut corpus æqualibus temporibus æqualiter ad Horizontem, sive telluris superficiem accederet; ita deinde voluit, ut æqualibus temporibus æqualiter accederet ad punctum aliquod datum in axe curvæ, vel ab eo recederet. Neque verò novæ istæ difficultates præstantissimorum Mathematicorum animos deterruerunt: enim verò quæsita curva paracentrica, sive æquabilis accessus, vel recessus à puncto dato, definita fuit, non modò ab ipso Leibnitio, verùm etiam à laudatis Fratribus Bernoullis, quorum alter hoc in eâ præstantis invenit, quòd infinitas efficeret revolutiones, priusquàm ad datum punctum perveniret.

Hoc idem problema ulteriùs etiam evexit Clarissimus Varignonius in Commentariis Regiæ Scientiarum Academiæ Parisiensis. Nam, quantum ad accessum corporis relatè ad Horizontem, petiit, ut is non modò fieri deberet in ratione temporum simplici, verùm etiam in qualibet aliâ temporum ratio-

tione: idque, tum in hypothesi gravitatis constantis, & tendentis ad punctum infinitè distans, cùm in aliâ quavis gravitatis suppositione. Quantum verò ad corporis accessum, vel recessum à puncto dato, non modò casum consideravit, quum punctum datum est in axe curvæ, sed etiam, quum in plano ejus curvæ extra axem existit; quin imò deinde ad eum quoque casum animum appulit, quum datum punctum extra curvæ planum reperitur.

Sed & eam quoque Statices partem, quæ de æquilibrio ponderum, vel potentiarum inter se commissarum agit, certatim excolere, & ad majorem perfectionem evehere tentarunt Recentiores Mathematici. Quandoquidem non modò leges istius æquilibrii ex principiis certis, & inconcussis, nec à nemine sanæ mentis in dubium revocandis deducere conati sunt; verùm etiam methodum excogitarunt valde facilem, ac expeditam, determinandi mediam directionem plurium potentiarum, quæ unum, idemque punctum trahant, hoc est lineam, secundùm quam agere debet in punctum illud potentia ex omnibus composita, quò eundem pariat effectum.

Licuit autem ipsis talem methodum excogitare beneficio præclari hujus theorematis, quòd plures potentiæ, unum idemque

punctum trahentes, nequeant esse in æquilibrio, nisi punctum illud sit commune centrum gravitatis totidem ponderum æqualium, existentium in extremitatibus rectarum, quæ potentias illas longitudine suâ designant. Atque hoc quidem theorema, quemadmodum talem æquilibrii legem nobis suppeditat, qua meo judicio nulla dari possit vel simplicior, vel generalior; ita non alii ferendum est acceptum, quàm Illustri Leibnitio, utpote quod in aliquâ ejus epistolâ, jampridem ad Celeberrimum Wallisium datâ, sine demonstratione exhibetur.

Hujus itaque theorematis præsidio, non modò determinarunt æquilibrium, & mediam directionem potentiarum, quæ uni eidemque puncto sunt applicatæ, verùm etiam earum, quæ diversis punctis alicujus inflexibilis corporis applicantur. Sed eum quoque casum considerarunt, quum corpora, quæ trahuntur à potentiis, flexibilia sunt, cujusmodi sunt fila, vel funes: qua in re hoc quidem theorema generale comperierunt, quòd media directio quotcumque potentiarum, filum subinde trahentium, ut consistant in æquilibrio, transeat per punctum, in quo sibi mutuò occurrunt fili portiones extremæ, ita ut si potentiarum numerus augeatur in infinitum, ipsumque adeò filum flectatur in curvam, eadem me-

dia

dia directio transeat per concursum rectarum, quæ curvam tangunt in punctis extremis.

Preterea rationem determinantes, quæ est inter firmitates singularum fili portionum, illud etiam comperierunt, eandem in singulis fili portionibus firmitatem adesse, quotiescumque quælibet potentia dividit bifariam angulum, in quem ipsa filum flectit; idque quum contingit, mediam directionem omnium potentiarum dividere quoque bifariam angulum, quem extremæ fili portiones productæ constituunt. Ex quo facile fuit eis inferre, quum filum per infinitas potentias flectitur in curvam, eandem in singulis portionibus fili firmitatem reperiri, si cujusque potentiæ directio secet ad rectos angulos curvam, in quam flectitur filum; atque hoc in casu inventam iri mediam directionem potentiarum omnium, secando bifariam angulum, contentum sub rectis, quæ curvam in suis extremitatibus contingunt.

Neque verò putandum est, subtiles hasce speculationes inutiles esse, nec ullum ex iis usum colligi posse. Velum quippe vento tumidum flectitur in curvam perinde, ac si traheretur ab infinitis potentiis, perpendiculariter ad curvam illam applicatis; quum omnis actio per lineam perpendicularem ad

ad superficiem corporis patientis debeat æstimari. Quocirca Nautæ facili negotio poterunt determinare lineam, secundum quam ventus agit in velum: nimirum ducendo ad veli extremitates, sive cogitatione, sive chordarum ope, tangentes duas, & bisecando angulum, quem mutuò occursu constituunt; quandoquidem linea bisectionis erit illa, quam quærunt.

Mediæ istæ directiones ansam præbuere Amplissimo Viro Jacobo Bernoullio novum curvarum genus considerandi, quas lineas mediarum directionum vocitavit. Etenim, si filum per infinitas potentias, ei perpendiculariter applicatas, in curvam flectatur, prout augetur fili longitudo, augeturque numerus potentiarum, alia fiet, atque alia earum media directio. Itaque curva, quam contingunt omnes istæ mediæ directiones, quæque constituitur per concursum duarum ex iis indefinitè proximarum, illa est quam mediarum directionum lineam appellavit; ejusque accidens præcipuum hoc est, ut convexitatis ejus in omni loco subdupla sit convexitas, quam in loco correspondenti habet curva, in quam flectitur filum.

Filum autem, cui infinitæ potentiæ ad rectos angulos sunt applicatæ, ostendente Johanne Bernoullio, Jacobi Fratre, talem in-

induet curvaturam, ut convexitas ejus in quolibet loco sit, ut potentia, quæ filum trahit in loco illo. Ex quo patet, curvam, in quam flectitur filum, tunc tantum esse circularem, quotiescumque potentiæ omnes, perpendiculariter ad filum applicatæ, inter se sunt æquales. Hinc velum vento tumidum in circuli circumferentiam flecti non potest, nec item linteum, quod stagnante liquore intumescit; quia utroque casu singula curvæ elementa à totidem aeris, vel liquoris filamentis premuntur quidem ad rectos angulos, sed æquales pressiones non subeunt, nec ideò ab æqualibus potentiis trahuntur. Interim cognitâ lege pressionis, quam in curvæ elementa exerunt filamenta sive aerea, sive liquoris, facile fuit Johanni Bernoullio ex generali suo theoremate naturam curvæ deducere, quam sive velum, sive linteum cogitur induere.

Ex cognitis legibus æquilibrii quotcumque ponderum, vel potentiarum, facem præeunte methodo indefinitè parvorum, nullo quoque negotio deduxerunt Recentiores Mathematici elegantem regulam Guldini, jam à Pappo disertè indicatam, quòd figura, quæ oritur ex revolutione cujuslibet magnitudinis circa rectam aliquam positione datam, æqualis sit facto ex magnitudine genetrice in viam sui centri gravitatis;

tis; eandemque veram esse demonstrarunt, tum in figuris revolutione genitis, cùm in iis, quæ alio quovis motu generantur, dummodò motus tali lege fiat, ut magnitudo genetrix insistat semper ad rectos angulos super lineâ, quam gravitatis suæ centrum motu illo describit. Sed exinde generales etiam quasdam methodos collegerunt, quibus facili negotio determinari posset centrum gravitatis in figuris regularibus, sive planis, sive solidis. Etsi enim innotuerit Veteribus, centrum istud in omnibus omninò figuris reperiri; attamen nullas ejus centri inveniendi regulas universales tradiderunt; sed id pro unaquaque figurâ peculiari quodam artificio indagare cogebantur.

In figuris, quæ moventur, præter centrum gravitatis, considerarunt etiam Recentiores Mathematici centrum percussionis, nimirum punctum illud, in quo omne figuræ momentum colligitur, & coacervatur, quodque proinde tale est, ut si eo figura alicui occurreret obstaculo, magis illud percuteret, quàm si alio quovis puncto in idem obstaculum impingeret. Hujusmodi quippe punctum, quum subinde in figurâ situm esse debeat, ut momenta omnium elementorum, ad unam ejus partem existentium, æquilibrentur in puncto illo

illo cum momentis elementorum, quæ ad partem alteram existunt, confundetur quidem cum ipso gravitatis centro, hoc est cum puncto illo, in quo colligitur, & coacervatur vis gravitatis, quotiescumque figura subinde ponitur moveri, ut singula ejus elementa eâdem ferantur velocitate. Verum aliud, atque aliud erit à centro gravitatis, quum singula figuræ elementa diversis velocitatibus feruntur.

Itaque Recentiores Geometræ, quemadmodum methodos excogitarunt generales pro determinando centro gravitatis, ita quoque generales regulas prodiderunt pro definiendo centro percussionis. His regulis probè instructus Varignonius detexit in Commentariis Regiæ Sciētiarum Academiæ Parisiensis, quòd in doctrinâ de resistentiâ solidorum horizontaliter suspensorum, quam ipse loco citato ad suam universalitatem evexit, quemadmodum in hypothesi Galilæi, quòd omnes fibræ sectionis tendantur æqualiter, considerari debeat centrum gravitatis sectionis resistentis; ita in hypothesi Leibnitii, & Mariotti, quod vires fibras tendentes eò majores sint, quò magis distent ab hypomochlio, præter centrum gravitatis considerandum sit etiam centrum percussionis ejusdem sectionis: id, quod ipsis ejus hypothesis præclaris Auctori-

ribus nequaquam innotuit.

Neque modò inter Recentiores præstantissimi quique Geometræ doctrinam de motu corporum solidorum, sive consistentium evehere longiùs studuerunt; verùm etiam conati sunt ea, quæ ad motum pertinent corporum fluidorum, perficere, novisque inventis loocupletare. Nam, ut prætercam leges, quibus gravitant fluida, tum in subjecta plana, cùm in latera vasorum, quibus continentur, longe universalius ab ipsis expositas, quàm ab Archimede factum erat; & silentio itidem committam æquilibrium corporum solidorum in fluidis demersorum, vel innatantium, quod in omni fluidorum genere tradiderunt; determinare etiam aggressi sunt, tum firmitates, quæ requiruntur in tubis ad perferendas fluidorum pressiones, tum figuras, quas à fluidis stagnantibus induunt corpora flexibilia.

Præterea hanc de viribus fluidorum, à gravitate pendentibus, doctrinam ad aerem traducentes, novam, ut superius innuimus, scientiam condiderunt, Aerostatices nomine decorandam, quam vix nascentem subinde certatim excolere, & ad suum perducere fastigium conati sunt, ut in hoc argumento subsecuturis Mathematicis otium quasi fecisse videantur. Atque hæc porro scientia eo plu-

pluris, meo judicio, æstimanda est, quia exinde facilè addiscere possunt Tyrones, qua ratione res naturales ad leges mathematicas sint revocandæ.

Ulteriùs in fluidis consideravit quidem Archimedes pressiones, ab eorum gravitate pendentes, verùm ad motus eorundem, per foramina, utlibet vasis insculpta, erumpentium, nequaquam respexit. Hoc igitur argumentum, quod utilitate suâ nulli cedit, primus omnium expendere aggressus est Benedictus Castellus; quem secuti deinceps Balianus, Torricellius, Borellus, Mariottus, aliique paulò diligentiùs, nec sine fructu illud examinarunt. Neque verò ab ipsis penitus fuit exhaustum: enim verò Celeberrimus Gulielminus doctrinam istam ad majorem perfectionem evexit, eamque ad fluminum motum ingeniosè etiam traduxit; tum deinde Varignonius in Commentariis Regiæ Scientiarum Academiæ Parisiensis hoc idem argumentum generaliter pertractavit, quæque in eo detexit, ad formulas quasdam universales, more suo, revocavit.

Ad hæc, quum de solidis in fluidis demersis vel innatantibus pertractandum suscepit Archimedes, mutuum tantum eorum corporum æquilibrium definire conatus est; ad effectus autem, ex eorundem collisione mutuâ dependentes, nequaquam animum ap-

appulit. Hujusmodi itaque effectus expendere, & ad leges mathematicas revocare tentarunt etiam Recentiores. Nec equidem irritus fuit conatus ipsorum. Nam, & actiones, quas exerunt fluida, dum ad solida corpora alliduntur, & resistentias, quas ipsa solida in fluidis mota patiuntur, tum ratione figuræ, cum ratione ipsius motus, incredibili solertiâ determinarunt.

Etsi autem in hoc argumento summi quique ævi nostri Geometræ vires suas exercuerint, principaliora tamen inventa uni Newtono ferenda sunt accepta. Id verò, quod in hac re præcipuum est, & ad navium constructionem usui nobis esse potest, est determinatio figuræ, ex cujus circa axem revolutione tale oriatur solidum, quod in fluido motum secundum directionem sui axis, minus inveniat resistentiæ, quàm aliud quodvis eâdem longitudine, & latitudine descriptum solidum circulare. Hanc itaque figuram pro eo, quo pollebat, mentis acumine determinavit Newtonus; sed quum inventum absque ullâ demonstratione erudito orbi impertiverit, eam supplevit Illustris Hospitalius in Actis Lipsiensibus, & in Monumentis Regiæ Scientiarum Academiæ Parisiensis.

Ex doctrinâ istâ generali de actione fluidorum in corpora solida, & de resistentiâ solido-

lidorum, quam in fluidis ſubeunt, ſuborta eſt nobis alia paulò ſpecialior de motu navium, vento impulſarum, quæ ad Nauticam Manuariam ſpectat. Hanc partem Nauticæ Scientiæ, longè utiliorem illâ, quæ uſum pixidis magneticæ reſpicit, excoluit primus omnium Dominus Renaldus. Verùm quæſtio, inter ipſum, & Hugenium orta, pro determinandâ navis velocitate, anſam dedit Johanni Bernoullio, ut idem argumentum paulò diligentiùs expenderet. Quumque noverit Theoriam Domini Renaldi corruere, tum quia non rectè definivit velocitatem navis, tum etiam quia nec deviationem ejus probè determinavit; novam Nauticæ Manuariæ Theoriam adinvenit, cujus ſpecimen erudito Orbi impertivit in libro, cui titulum fecit: *Eſſay d'une nouvelle theorie de la Manoevre des Vaiſſeaux*.

Aliud etiam argumentum in Principiis ſuæ Philoſophiæ Mathematicis geometricè tractare auſus eſt Illuſtris Newtonus: nimirum quibus legibus motus per fluida propagetur. Inter theoremata autem, quæ huc ſpectantia demonſtravit, hoc quidem eſt præcipuum, quòd pulſibus per fluidum propagatis ſingulæ fluidi particulæ motu reciproco euntes, & redeuntes accelerantur ſemper, & retardantur pro lege oſcillationis penduli. Unde, quum ſoni, utpote à corpo-

ribus tremulis orti, nihil aliud sint, quàm aeris pulsus propagati; collegit exinde, partium sonori corporis vibrationibus alternis circumjectum aerem elasticum propelli, atque adeò densari nonnihil, tum verò relaxari, & in partes contrarias regredi: idque fieri, tum in aere ipsis contiguo, cùm per actionem istius in aere remoto, vicibus permutatis. Atque ex hoc progressu, & regressu partium aeris præcipua sonorum phœnomena mirâ facilitate deduxit.

Motum quoque fluidorum circularem ad leges geometricas revocare tentavit idem Newtonus: qua in re duos casus consideravit. Primus est, quum fluidum uniforme, & infinitum agitur in orbem ab impulsu cylindri infinitæ longitudinis, qui circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur. Et secundus, quum fertur in gyrum ab impulsu sphœræ, circa suum axem uniformiter quoque gyrantis. Invenit autem, quòd si pars fluidi unaquæque uniformiter in motu suo perseveret, tempora periodica partium fluidi in primo casu sint, ut ipsarum distantiæ ab axe cylindri; in secundo verò, ut quadrata distantiarum à centro sphœræ. Unde, quum planetarum primariorum circa Solem revolventium tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro Solis, eademque regula ob-

cis

tineat etiam in planetis secundariis; collegit exinde phœnomena cœlestia aliâ ratione, quàm per Vortices, à Philosophis esse explicanda.

His igitur omnibus doctrinam de viribus, & motibus corporum locupletarunt Recentiores Mathematici. Jam alter nunc annus agitur, ex quo omnia ista Recentiorum inventa subinde in unum corpus congerere mihi proposui, ut ex paucis, iisque simplicibus principiis cuncta in eo essent ostensa, ac derivata. Etsi enim ante aliquot annos id summâ cum laude præstiterit Mathematicus Celeberrimus Jacobus Hermannus in suâ Phoronomiâ; res tamen non ita cõfecta mihi videbatur, ut major ei lux, majorque rerum copia accedere non posset.

Verùm, quum opus istud non dum ad umbilicum sit perductum, quin ei perficiendo plures annos destinarim; cogitatio mihi subiit, edendi interea in commodum, & usum studiosæ nostræ Juventutis aliquot ejus specimina sub nomine Statices, Hydrostatices, & Aerostatices. Et quoniam consilium istud summo Mathematum Professori Augustino Ariano, cujus provinciam vicario jure per quinquennium jam substinui, non displicuit; statim hæc Statices Elementa edenda curavi, editurus deinceps eâdem formâ Elementa, tum Hydrostatices, cùm

Aerostatices, nisi quis ex transverso casus incurrat.

Jam nomine Statices eam voluimus intellectam facultatem, quæ motum gravium considerat; tum artificiosum, tum naturalem, tum denique violentum. Hinc ejus Elementa quatuor sectionibus complexi sumus. In primâ siquidem generaliora Statices principia præmittenda duximus; in secunda motum gravium artificiosum consideravimus; in tertia de motu gravium naturali sermonem instituimus; & in quarta demum ea, quæ pertinent ad motum gravium violentum, sumus prosecuti. In singulis autem sectionibus multò plura Lector habebit, quàm ex earum titulis primâ facie judicabit. Neque verò à materia, de qua agitur aliena ea esse comperiet; nam illa semper mihi placuit disciplinas pertractandi ratio, ut propriis suis locis singula committerentur.

Speciatim in prima sectione, ubi de communi gravium centro agendum nobis fuit, quæstionem de figurâ telluris conati sumus definire, & ex deprehensâ inæqualitate graduum terrestrium in extensione telluris secundùm polos licuit nobis, mediante doctrinâ Recentiorum de lineis evolutis, breviter quidem, sed perspicuè demonstrare, tellurem esse oblongatam versus polos, & non

non jam versus æquatorem. Inde verò innotuit Nobis, commune gravium centrum non esse merum punctum, quemadmodum huc usque existimatum fuit à Mechanicis, sed superficiem illam, quæ est evoluta superficiei terrestris. Unde veram novimus rationem, cur pendulorum oscillationes evadant celeriores in iis locis, quæ magis ab æquatore recedunt.

Ad eam Statices partem, quæ agit de motu gravium artificioso, visum est nobis commodè referri posse doctrinam de legibus, quæ in mutuo corporum occursu deprehenduntur. Crediderim leges istas à Nobis simpliciùs longè, & faciliùs expositas esse, quàm ab aliis huc usque factum erat; sed id Lectoris judicio committo. Audio circa hanc materiam nova quædam, nec adhuc ab ullo cogitata sese obtulisse Clarissimo Viro Johanni Baptistæ Lamberto, qui non modò inter nostrates Philosophos & Mathematicos, verùm etiam inter exteros locum suum meretur; sed optandum esset, ut bono publico ea in lucem edere non gravaretur, ne scilicet tum Nos, cùm nostri Nepotes iis frustraremur.

Cœterum, quum hæc Statices Elementa in Tyronum gratiam composita sint, mirum esse non debet, si nonnullæ demonstrationes provectioribus Geometris prolixæ ni-

mis videantur: nimirum, quia iis, quorum rationem præcipuam habuimus, non semper in potestate est, ea supplendi, quæ ex demonstrationibus brevitatis gratiâ resecantur. Sed mirum etiam censeri non debet, si eædem demonstrationes, suppresso calculo, per quem analyticè inventæ sunt, more Veterum compositæ utplurimum afferantur. Enim verò in eâ semper sententiâ fui, ut quæ à Mathematicis analyticâ methodo per calculum inveniuntur, ea postea Tyronibus syntheticâ methodo sint proponenda.

Ut enim in privatis suis colloquiis sæpiùs dicere solent præclarus Consiliarius Constantinus Grimaldus, & Vir Eruditissimus Blasius Garofalus, uterque orbi litterario non uno nomine notus, præcipuus fructus, quem ex disciplinis mathematicis debent Tyrones haurire, haud quidem est cognitio earum veritatum, quæ in ipsis edocentur, sed perfectio mentis, qua ritè de rebus judicare, multòque meliùs ratiocinia sua componere possint. At verò istam mentis perfectionem, non tam demonstrationibus calculo institutis, quàm quæ syntheticâ methodo more Veterum fiunt, acquiri, notius est, quàm ut possit inficiari.

Hinc valde irascor iis, qui dum Juvenes in rebus geometricis instruere aggrediuntur, utun-

utuntur libris, in quibus res istæ calculo analytico sunt pertractatæ. Non inficior, calculum ad capacitatem mentis augendam valde prodesse, nec adeo sum demens, ut calculum è Geometriâ exulem optarem; sed hoc unum libenter expeterem, ut Tyrones unà cum calculo in ratiociniis purè geometricis exerceantur. Nam, quemadmodum calculus mentis adauget capacitatem, ita ratiocinia purè geometrica mentem formant, ac perficiunt, eamque reddunt idoneam, tum in scientiis adipiscendis, cùm in iis peragendis, quæ ad vitæ usum referuntur; ut prætercam experientiâ mihi innotuisse, in rebus hisce multò magis Juvenes proficere, si utrâque methodo ad eas manuducantur, quàm si calculo tantùm insistant.

Denique illud hìc Lectorem monitum velim in his Statices Elementis frequentem esse usum curvarum in designandis viribus, velocitatibus, spatiis, temporibus, aliisque functionibus motus. Hanc verò designandi rationem, jamdiu à Geometris usurpatam, à rerum, de quibus agitur, naturâ non abludere, abundè liquet. Res quippè illæ, prout quantitates sunt, nullâ possunt meliori ratione designari, quàm lineis rectis; At verò, quum ad puncta unius rectæ lineæ, per cujus portiones unum earum rerum genus de-

 signa-

ſignatur, ordine applicantur omnes illæ rectæ lineæ, quæ genus alterum repræſentant; jam iſtarum linearum extremitates curvam quandam lineam efformabunt.

Hinc rectè Dominus de Tſchirnhauſen in Medicinâ ſuâ mentis & corporis obſervat, ad omne id, quod in tota Matheſi rarum aut abſconditum eſt, detegendum, requiri tantùm, ut omnes curvas poſſibiles, quotquot concipi poſſunt, conſideremus. Hac enim ratione facile erit, omnium Matheſeos objectorum relationes poſſibiles exhibere: adeo, ut ſi poſtea difficultas aliqua in particulari quadam ejus ſcientiâ occurrat, nihil aliud ad eandem ſolvendam opus ſit, quàm curvam illam, quæ rei iſti reſpondet, oſtendere. Unde non inutiliter tempus terunt, qui in doctrinâ curvarum excolendâ omnem ſuam operam collocant.

Ex eo autem, quòd frequens ſit uſus curvarum in his Statices Elementis, factum eſt etiam, ut & methodus indefinitè parvorum crebrò in iiſdem occurrat, quippe quæ in curvarum materiâ, ſummâ ſolertiâ, demonſtrationes contrahit, ac faciles reddit. Hæc methodus iis, qui Euclideis, aut Apollonianis demonſtrationibus ſunt aſſueti, durior nonnihil videbitur, quàm ut ei ſtatim poſſint acquieſcere. Sed ſciant velim, nihil in hac methodo adhiberi, quod ab ipſis etiam

Ve-

Veteribus non fuerit uſurpatum. Nimirum ſupponitur curvam omnem conſiderari poſſe velut polygonm infinitorum laterum indefinitè parvorum: id, quod ipſi Veteres aſſumpſerunt, dum polygona duo, alterum circulo circumſcriptum, alterum eidem inſcriptum, per multiplicationem laterum, in circulum ipſum tandem abire ſuppoſuerunt.

Itaque methodus iſta indefinitè parvorum eo tota innititur, ut curvæ portio indefinitè parva velut recta aſſumatur: quod quidem aſſumptum nō ſolùm à vero non abludere, ſed ex ipsâ curvarum geneſi ſponte ſuâ fluere, oſtenſum eſt à Nobis in Tractatu de Naturâ, & Proprietatibus Curvarum, non dum in lucem edito. Inde verò conſequens fit, eundem curvæ arculum conſiderari poſſe velut portionem rectæ lineæ, quæ curvam ibidem contingit. Unde tangente eò uſque productâ, donec diametro occurrat, fiet triangulum, diametro, ordinatâ, & tangente contentum, ſimile ei, quod ad illam curvæ portionem indefinitè parvam conſtituit recta, quæ ex uno ejus extremo parallela ducitur diametro.

Ut verò hæc methodus facilius adminiſtrari poſſit, conati ſunt Recentiores eam calculo quoque ſubmittere. Eſt autem calculus hujus methodi duplicis quidem ſpeciei

ciei

ciei. Alter etenim regulas tradit inveniendi quantitatum continuò crescentium, aut decrescentium momentanea incrementa, aut decrementa. Alter vicissim docet, qua ratione dati alicujus momentanei incrementi, aut decrementi inveniri possit quantitas crescens, aut decrescens, ad quam illud pertineat. Regulæ primi calculi generales sunt, nec ullibi remoram patiuntur; vicissim verò regulæ alterius sunt speciales, nec ad omnes casus se extendunt. Unde in priori calculo nihil ampliùs desideratur; per contrarium autem in altero excolendo nunquam Mathematicis otium futurum erit.

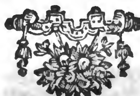
Duos istos calculos, numquam satis pro dignitate commendandos, detexit primus omnium Isaac Newtonus, Anglicæ Nationis Decus, & Ornamentum. Sed quum eorum se compotem esse certiorem faceret Geometram peritissimum Gulielmum Gothofredum Leibnitium, & litteris transpositis hanc sententiam continentibus: datâ æquatione, quotcumque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, & vice versâ, eosdem celasset; rescripsit Vir Clarissimus, se quoque in hujusmodi calculos jam pridem incidisse. Unde quæstio inter ipsos suborta, sive mavis inter Leibnitium, & Newtoni sive Socios, sive Discipulos, utri illorum inventionis glo-

gloria debeatur.

Quemadmodum autem Newtonus quantitates, quæ continuò crescunt, aut decrescunt, vocavit fluentes, sic easdem Leibnitius variabiles appellavit; & sicuti Newtonus momentanea illa incrementa, aut decrementa vocavit fluxiones, sic iisdem Leibnitius differentiarum nomem imposuit Unde duos illos calculos, quibus methodus indefinitè parvorum administratur, Angli cum suo Newtono methodum fluxionum directam, & inversam dixere; Germani autem, & Galli, qui Leibnitii vestigiis institerunt, calculum differentialem, & integralem appellarunt.

Jam in nostris hisce Statices Elementis adhibuimus quidem sepissimè, propter frequentem usum curvarum, methodum indefinitè parvorum, sed ut plurimum, neglecto calculo, eam in auxilium accersuimus. Ubi autem necesse nobis fuit ad calculum etiam confugere, placuit modum designandi differentias Leibnitianum usurpare, utpote commodiorem, & qui non tam facilè Typographis errorum suppeditat materiam. Sed monitum quoque Lectorem volo, non solum considerasse Nos curvas lineas, velut polygona laterum infinitorum, quorum unumquodque esset indefinitè parvum, verùm etiam, ut aggregata arcuum in-

infinitorum, qui similiter indefinitè parvi ad totidem circulos diversos referantur; quam sanè considerationem, ut superiùs innuimus, præbuit Geometris Theoria Hugeniana de lineis evolutis.



INDEX

INDEX
SECTIONUM, ET CAPITUM.

STATICES ELEMENTA.

SECTIO I.
De Generalioribus Statices Principiis.

CAP.

SECTIO II.

De Artificiosa Gravium Latione.

SECTIO. III.

De Motu Gravium Naturali.

SECTIO IV.

De Motu Gravium Violento.

STA-

STATICES ELEMENTA



Tatices nomine hìc intelligimus facultatem illam, quæ motum gravium conſiderat; tum artificioſum, qui machinarum ope perficitur; tum naturalem, qui à gravitate ipsâ dependet; tum denique violentum, qui à vi grave projiciente proficiſcitur. Hinc hujuſmodi facultas ex tribus velut partibus componetur, quarum una eſt de artificiosâ gravium latione, altera de gravium motu naturali, & tertia demum de motu gravium violento.

Ex tribus hiſce partibus, quæ hanc conſtituunt facultatem, prima tantùm Veteribus innotuit, eamque ſub nomine Mechanices tradiderunt, quia geometricis innixa principiis, vires expendit machinarum, quibus gravia moventur, aut ſuſtentantur. Sed quantum ad ſecundam, quæ motum gra-

vium naturalem considerat, necnon & tertiam, quæ agit de motu gravium violento; eæ omnino Veteres latuerunt, & utraque eximio Galilæo debetur.

Etsi enim Veteribus innotuerit, gravia inter descendendum naturalem suum motum accelerare, quum illud satis, superque quotidiana edoceat experientia; nihilominus juxta quam proportionem ista fiat acceleratio, nemo novit; & primus omnium Galilæus demonstravit, spatia à gravi è quiete cadente in temporibus æqualibus descripta eam inter se rationem retinere, quam habent numeri impares ab unitate se consequentes; atque adeo eadem spatia, à principio descensus computata, esse in duplicatâ temporum ratione.

Similiter, etsi nemo ex Veteribus non viderit, gravia, dum ab impellente manu projiciuntur, non rectam, sed curvam lineam describere; attamen nemo ante Galilæum ausus est naturam illius curvæ definire. Primus etenim Galilæus illam determinavit, & ex cognitâ gravium acceleratione collegit, curvam, quam projecta describunt, illam ipsam esse, quam parabolam Veteres appellarunt: unde postea omnia, quæ ad motum spectant projectorum, nullo negotio geometricè definivit.

Tametsi autem tres sint partes principalio-

liores; ex quibus constat universa Statica, sive doctrina de motu gravium; nihilominus harum institutionum elementarium, quas in Tyronum gratiam conscribimus, quatuor futuræ erunt sectiones. Prima etenim Statices principia generaliora continebit; secunda aget de artificiosâ gravium latione; tertia descensum, sive motum naturalem gravium considerabit; & quarta demum gravium motum violentum expendet.

SECTIO I.

De Generalioribus Statices Principiis.

OMnis Physico-mathematica disciplina oritur ex conjunctione Geometriæ cum aliquâ sensibili affectione materiæ: ex quo fit, ut principia illius disciplinæ sine illa eadem, quæ sensibilem illam materiæ affectionem respiciunt. Quum itaque Statica oriatur, applicando veritates geometricas ad motum corporum gravium; non alia erunt principia Statices generaliora, quàm quæ vel ad gravitationem corporum, vel ad motum ipsum in genere referuntur.

CAP. I.

De communi gravium centro, ubi etiam de figura telluris.

NIhil adeo apud Mechanicos invaluit, quàm dari in tellure punctum aliquod internum, quod commune esset gravium centrum. Esse enim gravitatem unam ex viribus, quas Recentiores centripetas, sive centrales appellant; id ex eo liquet, quod corpora omnia, vi gravitatis acta, ad tellurem tendant, tamquam centrum: non secus, ac lapis fundâ circumactus ad manum velut centrum perpetuò fundâ retrahitur. Sed quoniam vis ista gravitatis exercetur, non modò supra superficiem telluris, verùm etiam infra, hoc est in vallibus, & locis subterraneis; dirigetur procul dubio non ad telluris superficiem, sed ad punctum aliquod telluris internum. Itaque punctum istud internum telluris, ad quod dirigitur vis gravitatis, illud est, quod commune gravium centrum Mechanici vocant.

Supposità autem telluris sphæricâ figurâ, non aliud ostendunt esse commune gravium centrum, quàm centrum ipsum telluris. Experientia etenim docet, corpora gravia per vim gravitatis ad terram accedere secundùm

rectas lineas, perpendiculares ejus superficiei. Sed sphæricæ figuræ ea est proprietas præcipua, ut omnis recta linea ad ipsius superficiem perpendicularis transeat producta per centrum ejusdem. Itaque si rectæ lineæ, per quas gravia vi gravitatis ad terram accedunt, sint sphæricæ ipsius superficiei perpendiculares, eæ productæ transibunt omnes per centrum telluris, quod proinde commune erit gravium centrum.

Sphæricam porrò esse telluris figuram, nemo ante hac in dubium revocavit, tum propter eclipses lunares, in quibus umbra telluris, sive etiam atmosphæræ rotunda, & circularis conspicitur; tum propter observationes peractas ab iis, qui longa per terram, aut oceanũ itinera instituerunt, quum deprehenderint locorum tam latitudines, quàm longitudines augeri, vel minui pro confecti quasi itineris ratione; tum denique ob ipsam illam navigandi scientiam, qua in ultimas ducimur terrarum oras, quum ejus regulæ, ex præsuppositâ telluris figurâ sphæricâ velut ex unico principio deductæ, suum infallibiliter effectum sortiantur.

Verùm plures ex insignioribus nostri temporis Mathematicis ab hac de rotunditate telluris hypothesi recesserunt, & diversis principiis insistentes in duas opiniones toto cœlo diversas abiere. Primus enim Newto-

nus in principiis suæ Philosophiæ mathematicis, quum consideraverit singulas telluris partes, ob diurnam ejus circa proprium suum axim revolutionem, vim quandam centrifugam habere, per quam conantur continuò ab ipso axe recedere, & vim istam non eandem esse in singulis partibus, sed eò majorem, quò magis partes à polis recedentes ad æquatorem accedunt; collegit exinde tellurem elevatam esse versus æquatorem, & depressam versus polos.

Idem sensit quoque Christianus Hugenius in Diatribâ de Causâ Gravitatis. Nam rationem redditurus, cur pendulorum oscillationes celeriores sint in iis locis, quæ magis ab æquatore recedunt, id repetit ex eâdem diurnâ telluris revolutione, quæ producens in corporibus conatum quendam centrifugum, detrahit ex iis portionem proprii ponderis, conatui illi correspondentem, atque ita efficit, ut eò graviora sint corpora, cæteris paribus, quò magis ab æquatore recedunt: ex quo velut consequens infert partes æquatorias esse magis elevatas, quàm polares; quum actio gravitatis, quæ partes terrestres circa telluris centrum disponit, & aptat, major sit in polis, quàm in æquatore.

Interim etsi tam Newtonus, quàm Hugenius telluris figuram talem esse posuerint,

ut partes æquatoriæ ſint elevatæ, polares verò depreſſæ; nihilominus proportio, quam habet diameter telluris ſecundùm polos ad diametrum telluris ſecundùm æquatorem, non eadem ab utroque ſtatuitur. Hugenius enim (& poſt eum Hermannus in ſuâ Phoronomiâ) illam invenit, ut 577 ad 578; Newtonus verò in ſecundâ laudati ſui operis editione eandem ponit, ut 229 ad 230. Neque mirum; quandoquidem ad hanc proportionem indagandam, non eadem, ſed diverſa principia adhibuerunt.

At ex alterâ parte doctiſſimus Burnetus in ſuâ telluris theoriâ ſacrâ ex eâdem diurnâ telluris reſolutione figuram ejus talem eſſe contendit, ut partes polares ſint elevatæ, æquatoriæ verò depreſſæ. Conſiderat ſiquidem, quod etſi partes aqueæ, ſub æquatore exiſtentes, majores circulos deſcribant, atque adeo majorem habeant vim recedendi à centro motus, attamen ob reſiſtentiam aeris, eas ſupernè prementis, attolli nequaquam poſſint. Unde ob eandem illam vim verſus polos excurrentes, neceſſe eſt, ut partes telluris polares reddant elevatas, æquatorias verò depreſſas.

Hoc idem argumento alio majoris roboris adſtruit deinde Einſenſchimidius, mathematicus Argentorati. Nam perpendens magnitudinem gradus terreſtris in extenſione

telluris ſecundùm polos, quæ oritur ex pluribus dimenſionibus, quas ſub diverſis parallelis accuratiſſimè inierunt Erathoſtenes, Snellius, Ricciolius, & Piccartus, novit eam non eandem ubique eſse, ſed minui in acceſsu ad polos, augeri verò in acceſsu ad æquatorem. Unde collegit figuram telluris talem eſse oportere, ut paralleli quidem circulis, meridiani verò ellipſibus, umbilicos habentibus in axe telluris, eſsent repræſentandi.

Argumentum iſtud Einſenſchimidii, quod Burneti opinionem extra omne dubium ponit, confirmavit Caſſinus, conferendo obſervationes ſuas cum iis, quas ante ipſum inſtituit Piccartus. Nam ex menſurâ diſtantiæ, quæ eſt inter Ambianum, & Malvoiſinam, invenit Piccartus magnitudinem gradus terreſtris in extenſione telluris ſecundùm polos eſse pedum pariſienſium 342360; ex menſurâ verò diſtantiæ, quæ eſt inter Obſervatorium Pariſienſe, & Villam Colioure in Rouſſillon, collegit Caſſinus eandem gradus terreſtris magnitudinem eſſe pedum pariſienſium 342600. Unde, quia loca à Piccarto adhibita magis recedunt ab æquatore, quàm loca uſurpata à Caſſino, perſpicuum eſt, magnitudinem gradus terreſtris majorem eſse in acceſsu ad æquatorem, quàm in acceſsu ad polos; & propterea

figu-

figuram telluris talem esse oportere, ut partes polares sint elevatæ, æquatoriæ verò depressæ.

Jam quid in hac opinionum diversitate statuendum sit, nunc breviter discutiẽdum. Et primò quidem ratio, ex diurnâ telluris revolutione deprompta, qua utriusque opinionis assertores utuntur, litis hujus legitimus arbiter esse nequit; quandoquidem systema terræ motæ est merum commentum, ad ingenii potiùs, quàm veritatis, ostentationem inventum. Eo autem, velut merâ hypothesi, admisso, id quod contendit Burnetus, nequaquam sequitur; nam unà cum globo terraqueo movetur etiam atmosphæra; adeòque quemadmodum partes hujus propter conatum centrifugum attolluntur, ita quoque attolli debent partes aqueæ, infra illas existentes.

Sed neque etiam exinde conficitur, figuram telluris talem esse debere, qualem adstruunt Newtonus, & Hugenius, nempe ut partes æquatoriæ sint elevatæ, polares verò depressæ. Hoc enim tunc quidem sequitur, quotiescumque primigenia telluris figura ponitur circularis, & sphærica. Itaque si hanc eis hypothesim negemus, & loco ejus hanc aliam substituamus, ut tellus ab initio fuerit sphæroides oblongata versus polos; major ille conatus centrifugus in partibus,

quæ

quæ magis accedunt ad æquatorem, tantùm efficere potuit, ut tellus non adeò esset versus polos oblongata.

Quum igitur ratio, ex diurnâ telluris revolutione deducta, quæstionē istā nec possit, nec debeat definire, expendamus vim argumenti, quod eruitur ex deprehensâ inæqualitate graduum terrestrium in extensione telluris secundùm polos, nempe quod magnitudo gradus terrestris minuatur in accessu ad polos, augeatur in accessu ad æquatorem. Neque enim satis est ad adstruendam tellurem oblongatam versus polos, quod inæqualitas ista satis apte explicetur, ponendo meridianos omnes esse totidem ellipses, umbilicos habentes in axe telluris. Nam quum præter ellipsim innumeræ aliæ dentur curvæ lineæ, quæ in orbem redeunt, ostendendum est generaliter nullam dari posse ovalem, quæ illam explicans inæqualitatem, axim minorem habeat, per polos transeuntem, axim verò majorem per planum æquatoris.

Hujus rei demonstratio pendet ex doctrinâ Recentiorum de curvis evolutis; unde, ut ea meliùs intelligatur, præmittenda sunt priùs nonnulla de genesi curvarum, quæ per aliarum evolutionem describuntur: scilicet, quod si ABC sit curva quævis linea, filo undique æqualiter tenso involuta, ac
FIG. I.

com-

complicata, & fili extremitas A intelligatur, ita quidem moveri, ut ab ipso filo sensim curva evolvatur, atque interim evolutæ fili portiones BM, CN maneant semper æqualiter tensæ; quod inquam extremitas illa fili describat hoc motu curvam aliam AMN, respectu cujus dicitur evoluta, curva prior ABC.

Quemadmodum autem ex ipsâ curvæ genesi abundè liquet, portiones fili BM, CN, quæ radii evolutæ dicuntur, æquales esse correspondentibus evolutæ portionibus AB, AC; ita quoque ex eadem curvæ genesi haud difficulter colligi potest, eosdem radios BM, CN evolutam quidem contingere in punctis B, & C, ipsam verò curvam ex evolutione descriptam perpendiculariter secare in punctis M, & N.

Etenim, si portionem curvæ BC indefinitè parvam supponamus, atque ita eam consideremus velut portionem rectæ lineæ, quæ contingit evolutam in puncto B; quia portio fili BM æqualiter tensa supponitur, ea jacebit in directum cum illâ fili portione, qua involvitur curvæ portio BC; & consequenter, quia CBM est unica recta linea, ea erit, quæ contingit evolutam in puncto B.

Et quoniam portio ortæ curvæ MN considerari potest, veluti arcus descriptus centro C, & intervallo CM, sive CN, quum in

in evolutione portionis curvæ BC radius BM quodammodo circa punctum A circulariter moveatur, perspicuum est eundem radium BM non modò contingere evolutam in puncto B, verùm etiam curvam ex evolutione descriptam ad rectos angulos secare in puncto M; quum notum sit ex elementis omnes circuli radios circumferentiæ perpendiculariter insistere.

Atq;hinc liquet ulteriùs,quod sicuti curva ex evolutione descriptâ AMN cōsiderari potest, velut aggregatum infinitorum arcum, qui omnes sint indefinitè parvi, & ad totidem circulos diversos referantur, ita curva ipsa evoluta ABC respici possit, velut sedes, sive locus, in quo eorum omnium arcuum centra reperiantur. Unde suâ sponte consequitur, evolutam cujusque circuli circumferentiæ esse ipsum circuli centrum, unamquamque curvam nonnisi unicam evolutam habere, atque hujus puncta singula inveniri, quærendo punctum concursus duarum rectarum, quæ datam curvam in duobus punctis indefinitè proximis ad rectos angulos secent.

Sed notetur hoc loco velim, curvam ex evolutione descriptam posse quandoque diversum ab evolutâ ipsâ principium habere. Si enim filum, quod involvit curvam ABC, usque in D in directum protendatur, ita ut por-

portio ejus AD curvam contingat in A ; liquet, evolutione fili punctum D describere curvam DEF, cujus principium est diversum ab eo, quod refertur ad ipsam evolutam ABC. Verùm hoc casu radius evolutæ BE erit æqualis AB unà cum AD, & similiter radius CF erit æqualis AC unà cum eadem AD.

His prænotatis, haud difficile modò erit ostendere id, quod erat præcipuum. Sit enim ABCD ovalis, quæ oritur, secando tellurem plano per axim, sitque AC axis secundùm polos, & BD axis secũdùm æquatorem. Ostẽdendum est igitur, quod si in ovali istã magnitudo gradus terrestris minuatur in accesad polos, augeatur in accessu ad æquatorem, necessariò axis secundùm polos AC debeat esse major axe secundùm æquatorem BD. Fig. 2.

Quoniam enim uterque axis ovalem secat ad rectos angulos, fit hinc, ut evolutæ portionis AB radius correspondens puncto A sit axis AC, & radius correspondens puncto B sit axis BD : proindeque ipsa illius portionis evoluta existet inter rectas AC, BD. Et quoniam eædem rectæ AC, BD contingere debent evolutam, existet evoluta ista, vel intra angulum AED, vel etiam intra angulum BEC ; adeoque erit, vel curva PQR, vel curva STV.

Et quidem existente evolutâ intra angulum

lum AED, id, quod oſtendendum eſt, abundè liquet. Eſt enim curva PQR minor duabus rectis PE, ER, quæ illam comprehendunt; adeoque additâ communi AP, erit AP unà cum PQR minor duabus AE, ER. Sed AP unà cum PQR eſt æqualis radio evolutæ BR. Itaque duæ AE, ER majores erunt, quàm BR; & propterea ablatâ communi ER, erit AE major, quàm BE, ſive etiam AC major, quàm BD.

Quod ſi verò evoluta exiſtat intra angulum BEC, tunc viciſſim erit BD major, quàm AC. Nam curva STV eſt minor duabus rectis SE, EV, quæ illam comprehendunt; proindeque additâ communi BS, erit BS unà cum STV minor duabus BE, EV. Sed BS unà cum STV eſt æqualis radio evolutæ AV. Itaque duæ BE, EV majores erunt, quàm AV; adeòque ablatâ communi EV, erit BE major, quàm AE; & conſequenter BD major, quàm AC.

Eò itaq;res redit, ut oſtendamus evolutam portionis AB exiſtere intra angulum AED, quod equidem ſponte ſuâ conſequitur, ſi oſtēdi poſſit radios evolutæ illius augeri ab A verſus B; nam ſi utique exiſteret intra angulum BEC, viciſſim radii ipſius minuerentur ab A verſus B. Augeri autem radios evolutæ, quæ refertur ad portionem AB, ab A verſus B, ex deprehensâ graduum terreſtrium

ſtrium inæqualitate in hunc, qui ſequitur, modum oſtendemus.

Capiantur in ipsâ AB duo arcus indefinitè parvi AM, MN, ſed ita tamen, ut iis eadem correſpondeat latitudinum differentia, & non conſideratâ evolutæ poſitione, ſint MO, NQ radii ejus correſpondentes punctis M, & N. Quia igitur, in omni figuræ telluris hypotheſi, differentia latitudinum duorum quorumvis locorum eſt angulus, quem conſtituunt rectæ lineæ, ex iis locis perpendiculariter ad telluris ſuperficiem erectæ; erit angulus AOM differentia latitudinum in locis A, & M; & angulus MQN differentia latitudinum in locis M, & N; adeoque, quum ex hypotheſi arcubus AM, MN eadem correſpondeat latitudinum differentia, erit angulus AOM æqualis angulo MQN.

Hinc ſimiles ſunt ſectores AMO, MNQ; eritque proinde ut AM ad MN, ita MO ad NQ. Et quoniam magnitudo gradus terreſtris augetur in acceſſu ad æquatorem; ex arcubus AM, MN, quibus eadem correſpondet differentia latitudinum, neceſſe eſt, ut MN major ſit, quàm AM: quare erit quoque NQ major, quàm MO, hoc eſt radius evolutæ, correſpondens puncto N, major radio, qui correſpondet puncto M. Quumq; eadem ſit demonſtratio de aliis evolutæ radiis,

con-

consequens est, evolutam ipsam talem esse, ut radii ejus augeantur ex A versus B: proindeque existet illa intra angulum AED, eritque adeò axis secundùm polos AC major axi secundùm æquatorem BD.

Rectè igitur infertur, tellurem esse oblongatam versus polos ex eo, quod magnitudo gradus terrestris augeatur in accessu ad æquatorem. Nam quæcumque ovalis oriatur, secando tellurem plano per axim, semper ex ostensis axis ejus secundùm polos major esse debet axi ejusdem secundùm æquatorem. Quocirca quum inæqualitas illa graduum terrestrium ob exactissimas Geographorum observationes nequeat in dubium revocari; concludendum est, figuram telluris reverâ talem esse, ut partes polares sint elevatæ, æquatoriæ verò depressæ.

Ex eo autem, quod tellus non sit sphærica, quemadmodum ante hac communiter credebatur, sed sphæroides oblongata versus polos; efficitur, ut commune gravium centrum neque etiam sit merum punctum, quemadmodum huc usque existimatum à Mechanicis, sed superficies illa, quæ est evoluta superficiei terrestris, quum ad istam tendant gravium directiones. Qua ratione si ABCD sit ovalis, quæ oritur secando tellurem plano per axim, sitque PRVS ovalis hujus evoluta; quemadmodum per

re-

revolutionem ovalis circa axim AC describitur superficies terrestris, ita per revolutionem evolutæ circa eundem axim generabitur superficies, quæ pro communi gravium centro debet haberi.

Atque hinc modò ratio intelligi potest, cur pendulorum oscillationes evadant celeriores in iis locis, quæ magis recedunt ab æquatore: nimirum, quia tametsi partes æquatoriæ sint depressæ, polares verò elevatæ, attamen distantia corporis gravis à centro, in quod gravitat, sit major in accessu ad æquatorem; quum radii evolutæ, describentis ovalem, quæ oritur secando tellurem plano per axem, à polo versus æquatorem cōtinuò crescant. Cæterùm etsi vera telluris figura non sit sphærica, sed sphæroides versus polos oblongata; quia tamen differentia inter diametrum secundùm æquatorem, & diametrum secundùm polos, tanta non est, ut neglecta possit nos in examinandis motibus corporum gravium in sensibilem aliquem errorem inducere; proinde supponemus inposterum figuram telluris ad sphæricam accedere, adeòque commune gravium centrum illud idem esse, quod hucusque à Mechanicis usurpatum.

CAP. II.

De centro gravitatis cujusque corporis, ubi etiam de linea directionis.

Quemadmodum in tellure considerant Mechanici commune gravium centrum, ita in unoquoque corpore centrum propriæ suæ gravitatis mente concipiunt. Hoc autem vocant punctum illud corporis internum, in quo vis gravitatis subinde colligitur, & coacervatur, ut extra ipsum nihil gravitatis in aliis corporis particulis inesse videatur, & circa quod proinde partes ejusdem corporis subinde librantur, ut si exinde corpus ipsum suspendatur, eundem semper suarum partium situm retinebit, nec in ipsâ suspensione circumvertetur.

Hinc tale punctum in illo semper plano reperietur, quod corpus ipsum dividit in duas partes æquiponderantes; nam quum partes illæ sint ejusdem ponderis, necesse est, ut eædem subinde librentur circa planum illud, ut neutra alteram attollere possit. Neque verò requiritur, ut partes, in quas dividitur corpus à plano secante, sint semper ejusdem magnitudinis; nam pondera corporum, ut inferiùs ostendemus, in datâ di-

stan-

ſtantiâ à communi centro gravitatis, non quidem magnitudinibus, ſed quantitatibus materiæ, in iis exiſtentibus, proportione correſpondent.

Quod ſi verò materia alicujus corporis eſſet ejuſdem ubique denſitatis, tunc equidem partes duæ, in quas diſpeſcitur corpus à plano, per centrum gravitatis tranſeunte, non modò erunt ejuſdem ponderis, verùm etiam ejuſdem magnitudinis. Nam quantitas materiæ, quæ exiſtit in unoquoque corpore, ut ſuo quoque loco videbimus, repetenda eſt ex magnitudine, & denſitate conjunctim; adeòque quum duo corpora eandem habent denſitatem, tunc eorum materiæ quantitates erunt in ſolâ magnitudinum ratione.

Ex eo autem, quod centrum gravitatis cujuſque corporis reperiatur in plano, quod corpus ipſum dividit in duas partes æquiponderantes, haud difficile erit oſtendere cum Pappo Alexandrino, quod centrum iſtud gravitatis exiſtat, non ſolùm in corporibus, quæ certum ſervant partium ordinem, ſed etiam in iis, quæ temerè, & caſu formata ſunt, quodque idem centrum nonniſi merum punctum eſſe debeat.

Si enim corpus quodcumque unâ ſui dimenſione ſuper plano verticali collocetur, habebit aliquando poſitionem talem, ut

B 2 ma-

maneat immotum, & non decidat: proindeque si planum producatur, secabitur corpus in partes duas æquiponderantes, atque adeò planum secans transibit per centrum gravitatis. Similiter, si idem corpus alterâ sui dimensione super eodem plano collocetur, acquiret aliquando talem positionem, ut dimissum maneat, & non decidat: proindeque si rursus planum producatur, secabit denuo corpus in partes duas æquiponderantes, atque adeò iterum transibit per centrum gravitatis. Denique, si super eodem plano tertiâ sui dimensione corpus idem applicetur, & in eâ positione, in qua dimissum manet libratum, & non decidit, producatur tertiò planum, secabitur adhuc corpus in partes duas æquiponderantes, & propterea planum illud transibit tertiò per centrum gravitatis. Unde quum tres istæ corporis sectiones nonnisi unicum punctum commune habeant, erit punctum illud commune centrum gravitatis corporis propositi.

Præterea in descensu libero gravium considerant Mechanici lineam directionis, eamque vocant lineam illam, quam dum grave corpus descendit, propriæ suæ gravitatis centrum describit. Unumquodque etenim grave, quum liberè descendit, non quidem obliquè, sed rectà ad horizontem, sive telluris superficiem accedere; id equidem abundè

dè docet experiẽtia. Sed hanc interim rectam lineam horizonti perpendicularem, per quam grave corpus descendit, non ab alio puncto describi; quàm à centro suæ gravitatis; id sanè non solùm experientia, sed ipsa naturalis ratio suadet.

Omnis etenim gravitas cujusque corporis subinde in ipso gravitatis centro colligitur, & coacervatur, ut extra ipsum nihil gravitatis in aliis corporis particulis inesse videatur. Quocirca, quum grave aliquod corpus vi gravitatis deorsum fertur, cæteræ corporis partes, velut omni pondere destitutæ, motum centri gravitatis consequentur: proindeque linea ad horizontem perpendicularis, per quam decidit grave corpus, à centro propriæ suæ gravitatis describetur.

Istæ gravium directiones convergunt omnes ad commune gravium centrum; sed nihil interim vetat, quominus eæ velut parallelæ considerentur. Notum est enim apud Geometras, rectas lineas, ad punctum indefinitè distans convergentes, posse velut parallelas considerari. Jam verò commune gravium centrum, ad quod convergunt gravium directiones, indefinitè distat à nobis. Itaque gravium directiones, tametsi convergentes ad commune gravium centrum, possunt velut parallelæ absque sensibili errore considerari.

Quum grave corpus super plano aliquo insistit, & linea directionis transit per basim ipsius, illud semper manebit immotum. Conatur quippe grave corpus ad tellurem accedere secundùm lineam directionis. Itaque quotiescumque nequit per hanc lineam vim suam gravitatis exercere, necesse est, ut maneat immotum, & non decidat. Sed insistente corpore subinde super plano aliquo, ut linea directionis transeat per basim ejus; tunc nequit per lineam illam vis gravitatis exerceri, quum impedimento sit planum subjectum. Quare necesse est, ut hoc casu maneat immotum, & non decidat.

Vicissim verò, quum corpus ita quidem insistit super plano aliquo, ut linea directionis cadat extra basim, tunc nequaquam manebit immotum, sed decidet necessariò; quia scilicet potest optimè vis gravitatis secundùm lineam directionis exerceri, quum ei nihil sit impedimento. Unde corpus sphæricum super plano aliquo inclinato positum, si sit ejusdem ubique densitatis, non potest non descendere; nam ratione rotunditatis contingit subjectum planum in unico tantùm puncto, per quod linea directionis nequaquam transit, quum linea illud conjungens cum centro gravitatis, velut perpendicularis ad planum inclinatum, obliquè secet planum horizontale.

Ne-

Necesse est autem, ut corpus sphæricum sit ejusdem ubique densitatis, quò centrum suæ gravitatis in ipso sphæræ centro repeřiatur. Nam si nexus partium non sit ubique idem, neque adeò eadem ubique densitas, tunc centrum gravitatis nequaquam in centro sphæræ reperietur: proindeque linea conjungens punctum contactus cum centro gravitatis, quia obliquè secat planum inclinatum, poterit quandoque ad rectos angulos horizontali plano occurrere; & consequenter vices lineæ directionis sustinere.

Sed in ipso plano horizontali tunc etiam corpus sphæricum ejusdem ubique densitatis manet immotum, & non decidit, quum collocatur in eo loco, in quo tellurem contingit, & respectu cujus plani horizontalis nomen meretur; quandoquidem isto dumtaxat in loco linea conjungens punctum contactus cum centro gravitatis, velut perpendicularis ad superficiem telluris, vices sustinet lineæ directionis. Unde quocumque alio in loco corpus sphæricum collocetur, quia linea directionis transire nequit per punctum contactus; cadet ista semper extra basim, adeòque ipsum corpus sphæricum nequaquam manebit immotum.

Jam quum corpus sphæricum super plano horizontali alio in loco collocatur, quàm in eo, in quo telluris superficiem

planum contingit; cadet linea directionis inter locum istum, & punctum contactus corporis sphærici : unde corpus versus eundem hunc locum diriget motum suum, veluti declivem respectu ejus, in quo reperitur. Sed quum ad ipsum pervenerit locum, nolim credatis in quiete mansurum; nam juxta leges penduli, inferiùs à nobis ostendendas, necesse est, ut in alterâ plani parte tantundem spatii percurrat, quantum in priori peragravit; adeòque itu, redituque, non secus ac pendulum, perpetuò movebitur, nec unquam poterit ad quietem pervenire.

Ex iisdem principiis colligi quoque potest, corpora gravia eò magis viribus externis resistere, & erecta manere, quò majores fuerint bases, quibus innituntur. Nam ut ea concussa decidere possint, necesse est, ut linea directionis cadat extra basim; sed quò major est basis, intra quam vagari potest linea directionis, eò major requiritur vis ad hoc, ut ipsa directionis linea basim transiliat. Itaque corpora gravia externis viribus eò magis resistent, & immota manebunt, quò majores sunt bases, quibus inhærent.

Atque hinc ratio elucescit, cur homines utroque innixi pede stent facillimè, quum tamen difficulter maneant immoti, ubi

uni-

unico pede, multoque difficiliùs, quum vel calcaneo, vel apice pedis dumtaxat innituntur. Humanum ſiquidem corpus propter naturales ejus functiones concutitur indeſinenter, proindeque linea directionis continuò etiam variatur: ex quo fit, ut eo faciliùs ſtare poſſit erectum, quò major eſt baſis, intra quam vagari poteſt linea directionis; quæ quidem major eſt, quum pede toto, quàm quum calcaneo, aut apice pedis, multoque major, quum utroque pede innititur.

Patet etiam, cur corpus aliquod exile, velut eſt acus, ſuper cuſpide ſuâ erectum manere non poſſit: nimirum, quia propter continuum aeris motum linea directionis facilè extra baſim vagatur. Sed liquet quoque, cur columnis erectis eò major accedat reſiſtentia, quò majori pondere premuntur; ſcilicet, quia ob majus illud pondus non ita facilè concuti poſſunt, adeoque major requiritur vis, ut linea directionis baſim egrediatur.

CAP. III.

De univerſali corporum gravitatione, & de ejus legibus præcipuis.

Corpora omnia terreſtria gravitare in terram, phœnomenon eſt, quod abundè

dè docet experentia ; quum nullum adeo exiguum sit, quod non conetur ad tellurem accedere. Sed eandem gravitatem dari etiam in corporibus cœlestibus ea quidem ratione, ut planetæ primarii gravitent in solem, & planetæ secundarii in suos primarios, id primus omnium novit Newtonus ex totius universi systemate, quod ita nobis in admimirando suo opere principiorum Philosophiæ sub oculos posuit, ut nec ipse, si nunc revivisceret, Rex Alphonsus vel simplicitatem, vel harmoniæ gratiam in eo desideraret.

Inde autem collegit gravitationis hujus universalis tres esse leges præcipuas. Prima est, quod pondera corporum in æqualibus ab eo in quod gravitant distantiis, sint ut quantitates materiæ, quæ in iis corporibus existunt. Secunda, quod pondus unius, ejusdemque corporis in recessu ab eo, in quod gravitat, decrescat in duplicatâ ratione distantiæ. Et tertia, quod pondera corporum in diversis ab eo in quod gravitant, distantiis sint conjunctim, ut quantitates materiæ directè, & quadrata distantiarum inversè.

Et sanè omnes istæ leges gravitationis non aliundè repeti poterant, quàm ex totius mundani systematis cognitione; nam ex iis, quæ apud terram nostram experimur, non

non aliud colligi poſſe videtur, niſi quod pōdera corporum propè telluris ſuperficiem ſint, ut quantitates materiæ, in iis corporibus exiſtentes; quum non aliud nobis conſtet experientiâ, quàm quod æquales ſint accelerationes corporum omnium, per vim gravitatis è quiete cadentium, utpote quæ ſublatâ aeris reſiſtentiâ æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcribunt.

Ex eo enim, quod æquales ſint corporum omnium per vim gravitatis è quiete cadentium accelerationes, manifeſtè ſequitur, corporum pondera prope telluris ſuperficiem eſſe ut materiæ quantitates, quæ in corporibus exiſtunt. Nam quotieſcumque vis gravitatis in corpus aliquod operatur, illudque urget, & accelerat; quod ei opponitur, & reluctatur, eſt quantitas materiæ. Quocirca, quum duo corpora per vim gravitatis æqualiter accelerantur, in eo ſervatâ proportione major eſt actio gravitatis, in quo plus materiæ continetur: proindeque pondera, ſive vires gravitantes eorum corporum, erunt inter ſe, ut eorundem materiæ quantitates.

Sed non abs re erit hìc paucis innuere, qua ratione ex phænomenis cœleſtibus alias duas leges gravitationis deduxerit Newtonus. Nimirum naturæ lex eſt ab omnibus recepta Philoſophis, corpus omne perſe-

ſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi, vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus à viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare. Inde itaque ſequitur, corpora, quæ moventur in lineis curvis, atque adeò de lineis rectis orbitas ſuas tangentibus jugiter abeunt, vi aliquâ perpetuò agente in itinere curvilineo retineri; proindeque planetis in orbibus revolventibus neceſſariò aderit vis aliqua, per cujus repetitas actiones indeſinenter à tangentibus flectantur.

Jam autem circa motus planetarum, poſt Keplerum ſanioris Aſtronomiæ Patrem, illud in confeſſo eſt apud Aſtronomos omnes, nempe planetas primarios circa ſolem, & planetas ſecundarios circa ſuos primarios ſubinde revolvi, ut radiis ad illos actis areas percurrant temporibus proportionales. Unde quia mathematicis rationibus certiſſimè demonſtratur, corpora illa, quæ ita moventur in gyrum, ut areas circa punctum aliquod deſcribant temporibus proportionales, viribus urgeri ad punctum illud, velut centrum, tendentibus; conſequens eſt, ut vires planetarum primariorum ad ſolem, & vires ſecundariorum ad ſuos primarios tamquam centra dirigantur.

Præterea circa motus planetarum illud etiam convenit apud Aſtronomos univerſos: nimirum planetas omnes motibus ſuis non qui-

quidem deſcribere tot circulos, quemadmodum ſuperſtitioſa credebat antiquitas, ſed ellipſes totidem, umbilicum inferiorem in centro virium habentes. Quocirca quia mathematicis rationibus evincitur, vim, qua corpus revolvitur in ellipſi, eſſe ut quadratum diſtantiæ reciprocè, quum ad ellipſeos umbilicum tendit; concludendum eſt, vim qua quiſque planeta revolvitur, & in orbe ſuo detinetur, in receſſu à centro virium decreſcere in duplicatâ ratione diſtantiæ.

Ulteriùs, quia revolutiones planetarum primariorum circa ſolem, circumjovialium circa jovem, & circumſaturniorum circa ſaturnum ſunt phœnomena ejuſdem generis cum revolutione lunæ circa terram; naturalis ratio ſuadet, lunam eâdem omnino vi revolvi circa terram, qua revolvuntur planetæ primarii circa ſolem, circumjoviales circa jovem, & circumſaturnii circa ſaturnum, quum natura cauſis ſuperfluis non luxuriet. Itaque ſi oſtendi poteſt, vim, qua luna revolvitur circa terram, non differre à vi illâ, quam in corporibus terreſtribus gravitatem appellamus; conſequens erit, gravitatem dari in corporibus omnibus, & quemadmodum corpora terreſtria unà cum ipſâ lunâ gravitant in terram, ita planetas primarios gravitare in ſolem, circumjoviales in jovem, & circumſaturnios in ſaturnum.

Non

Non differre autem vim, quâ luna revolvitur circa terram, à vi ipsâ gravitatis, ostendi potest ex eo, quod utraque vi prope superficiem telluris idem omnino spatium dato tempore describatur. Assumptâ namque lunæ à terrâ distantiâ semidiametrorum terrestrium sexaginta, quia lunaris periodus respectu fixarum perficitur spatio dierum viginti septem, horarum quinque, & quadraginta trium minutorum, terræque ambitus est pedum parisiensium 123249600, uti à Piccarto mensuratore Gallo est definitum; invenietur inito calculo secundùm hæc elementa, lunam spatio unius minuti primi describere vi suâ pedes parisienses quindecim cum unâ parte duodecimâ; & propterea quia vis, qua luna detinetur in orbe suo, decrescit in duplicatâ ratione distantiæ, eadem luna prope terram describet vi suâ tempore unius minuti primi pedes parisienses 54300.

Porro Hugenius captis pendulorum experimentis, & calculo inde inito demonstravit corpora terrestria vi gravitatis cadendo describere eosdem pedes parisienses quindecim cum unâ parte duodecimâ tempore unius minuti secundi. Unde quia spatia vi gravitatis prope telluris superficiem descripta, ut inferiùs ostendemus, & ipsa confirmat experientia, sunt ut quadrata tem-

temporum, quibus ſpatia illa deſcribuntur; eadem corpora terreſtria tempore unius minuti primi deſcribent vi gravitatis prope terram pedes pariſienſes 54300; & propterea, quum æqualia ſint ſpatia, quæ à vi lunæ, & à vi gravitatis prope tellurem noſtram dato tempore deſcribuntur, concludendum eſt, vim lunæ prope terram adæquare vim gravitatis.

Non itaque differt vis, qua Luna revolvitur circa terram, à vi gravitatis: quare eadem erit utriuſque natura, nec aliâ vi tam luna circa terram, quàm planetæ alii revolventur, quàm ipsâ illâ, quæ efficit, ut corpora terreſtria decidant in terram. Unde facile modò erit alias duas gravitationis leges ex phœnomenis comprobare. Nam ſi vis gravitatis detur in corporibus omnibus, & quemadmodum corpora terreſtria gravitant in terram, ita planetæ primarii gravitent in ſolem, & ſecundarii in ſuos primarios; proculdubio quicquid circa vim iſtam gravitatis de uno corporum genere innoteſcit, illud idem de corporibus univerſis licebit affirmare. Quocirca, quia in planetis vis iſta gravitatis minuitur in receſſu à corpore, in quod gravitant, in duplicatâ ratione diſtantiæ; concludendum eſt, eandem vim gravitatis in corporibus terreſtribus decreſcere etiam in duplicatâ diſtantiæ ratione, quum à tel-

à tellure recedunt.

Atque hac gravitationis lege comprobatâ, facile erit & illam paulò generaliorem ostendere, quod pondera corporum, quæ in diversis ab eo, in quod gravitant, distantiis consistunt, sint conjunctim, ut quantitates materiæ in corporibus iis existentes directè, & quadrata distantiarum inversè. Nam si corpora illa essent in æqualibus ab eo, in quod gravitant, distantiis, pondera ipsorum ex superiùs ostensis suis quantitatibus materiæ directè correspondebunt. Sed pondus cujusque corporis in recessu ab eo, in quod gravitat, minuitur in duplicatâ ratione distantiæ. Itaque, quum corpora in diversis ab eo, in quod gravitant, distantiis consistunt, pondera ipsorum erunt conjunctim ut quantitates materiæ directè, & quadrata distantiarum inversè.

Quantum ad causam gravitatis, duæ sunt præcipuæ Philosophantium opiniones, toto cœlo diversæ. Prima est illorum, qui putant gravitatem esse universalem, longèque præcipuam in universitate rerum continendâ materiæ affectionem, quæ sit verum motus principium, veraque causa suæ conservationis. Atque hanc opinionem, in qua fuerunt omnes fere Veteres Philosophantes, apud Anglos rursus ad auras revocavit Vir Clarissimus Isaac Newtonus.

Nam

Nam inquit, quum materia ex se sit principium purè passivum, habeatque tantùm vim inertiæ, per quam corpora persistunt in illo statu, in quo semel sunt collocata; proculdubio ab illo solo principio nullus unquam in rerum naturâ motus potuisset oriri. Itaque alio aliquo principio omnino opus erat ad movenda corpora, & jam, quum moventur, aliud itidem requiritur ad motum eorundem conservandum, cujusmodi præter gravitatem est nullum.

Altera opinio est eorum, qui contendunt gravitatem esse merum motus effectum. Etsi enim ultro fateantur, materiam esse inertem, omnisque actionis expertem, nec proinde motum à materiâ oriri potuisse; attamen vim motricem, quæ in hac rerum universitate continendâ requiritur, non aliã agnoscunt, quàm ipsam Dei voluntatem. Supponunt enim, quod sicuti Deus ab initio certam creavit materiæ quantitatem, quam immutabili suâ voluntate conservat eandem, & immutatam; ita certam creatæ materiæ motus quantitatem indiderit, quæ per eandem ipsius Dei immutabilem voluntatem eadem semper, & invariata conservetur. Ex quo factum, ut quemadmodum prioris sententiæ assertores gravitatem à Deo, motum autem à gravitate repetunt; ita vicissim alterius hujus sententiæ patroni

motum quidem à Deo, gravitatem vero à motu deducant.

Qui gravitatem considerant velut principium generale, unde motus omnes subnascuntur, & quo mediante iidem motus conservantur, ii quidem recensitas leges gravitationis mechanicè explicare non tenentur; quia sicuti gravitatem à Deo repetunt, ita & legum gravitationis non alium, quàm Deum auctorem agnoscunt. Sed qui vicissim non aliud principium motus admittunt, quàm Deum ipsum, gravitatemque ut merum motus effectum respiciunt, iis quemadmodum onus incumbit ostendere, qua ratione ex motu impresso materiæ potuerit gravitas oriri, ita mechanicè debent explicare, quo pacto ex eodem principio tres illæ gravitationis leges consequantur.

Non me latet eos, qui gravitatem à motu repetunt, de mechanicâ gravitatis explicandæ ratione inter se non satis convenire; verùm id omnibus commune est, ut gravitas oriatur ex pressione, quam materia quædam subtilissima, tellurem undique cingens, exerit in grave corpus, quod inter illius materiæ particulas nequit in æquilibrio consistere. Unde facilè intelligimus, qua ratione pondus cujusque corporis in datâ à tellure distantiâ quantitati suæ materiæ correspondeat. Nam pressio, quam subit cor-

corpus grave, tanta eſt, quantam exerunt particulæ materiæ ſubtiliſſimæ, quæ ad ſervandum æquilibrium in locum illius corporis ſubingredi conantur; quarum quidem particularum numerus correſpondet multitudini partium, grave illud corpus componentium, hoc eſt, quantitati materiæ in corpore illo exiſtenti; quum interſtitiorum ejuſdem corporis nulla ratio ſit habenda, quippe quæ jam materiâ illâ ſubtiliſſimâ ſunt repleta.

Intelligimus etiam, qua ratione fiat, ut vis gravitatis in receſſu à tellure decreſcat in duplicatâ ratione diſtantiæ, atque adeò ut pondera corporum in diverſis à tellure diſtantiis ſint conjunctim, ut quantitates materiæ directè, & quadrata diſtantiarum inversè. Nam, quum oriatur vis gravitatis ex preſſione, quam materia quædam ſubtiliſſima exerit in grave corpus, erit vis gravitatis in omni diſtantiâ proportionalis huic preſſioni. Jam verò, ſi concipiamus ſubtiliſſimam illam materiam diviſam in innumeras ſuperficies, concentricas telluris ſuperficiei; erit hæc pseſsio major in ſuperficie minori, & minor in ſuperficie majori; adeòque reciprocè proportionalis ſuperficiei, in qua ea exercetur, hoc eſt reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ. Itaque & ipſa vis gravitatis in omni loco reciprocè

proportionalis erit quadrato diſtantiæ, adeoque in receſſu à tellure decreſcet in duplicatâ diſtantiæ ratione.

CAP. IV.

De quantitate materiæ, & rurſus de proportione, quam habet cum pondere corporis.

QUum motus corporum gravium prope telluris ſuperficiem à nobis conſiderentur, illud ſemper aſſumemus, ut pondus cujuſque corporis quantitati ſuæ materiæ proportione correſpondeat, atque adeò ut ipſa vis gravitatis eâdem ſemper, & conſtanti ratione in corpora operetur. Sed priuſquam ad alia progrediamur, non abs re erit de quantitate materiæ tantiſper diſſerere, ſimulque aliâ methodo oſtendere elegantem illam corporum proprietatem, quod pondera duorum quorumvis corporum prope telluris ſuperficiem eandem habeant rationem inter ſe, quæ inter eorundem materiæ quantitates deprehenditur.

Itaque quantitas materiæ, quæ exiſtit in unoquoque corpore, eſt complexus, ſive aggregatum partium omnium, quæ corpus illud componunt: unde etiam nomine maſſæ à nonnullis inſignitur. Harum partium numerus omnino nos latet; tum quia pars nul-

la determinari poteſt cogitatione tam adeò exigua, quæ in alias adhuc minores re ipsâ non ſit diviſibilis, nec proinde licet unquam ad ultimas devenire; tum etiam quia etſi corpora omnia ex minimis quibuſdam particulis, naturâ ſuâ indiviſibilibus, componerētur, attamen partes iſtæ propter figurarum diverſitatem non eſſent ejuſdem magnitudinis, neque ideo ex unius cognitione poſſet numerus omnium indagari. Ex quo fit, ut in comparandis quantitatibus materiæ, quæ in duobus quibuſvis corporibus exiſtunt, alia planè ratio debeat iniri, quàm numeros partium corpora illa componentium inter ſe mutuò conferre.

Et quidem ſi corpora omnia ſubinde eſſent compoſita, ut idem in omnibus ſit partium nexus, eademque corporum omnium denſitas; nulla meliori ratione duorum quorumvis corporum materiæ quantitates poſſent inter ſe mutuò comparari, quàm conferendo ſimul magnitudines, ſive moles eorundem corporum. Verùm quia corpora omnia non ſunt æqualiter denſa, nec eorum partes componentes eodem modo connectuntur; fit hinc, ut in duorum quorumvis corporum quantitatibus materiæ comparandis, non modò ad magnitudines eorum corporum debeat attendi, verùm etiam ad denſitates, ſive nexus partium componen-

 tium,

tium, nullâ habitâ ratione materiæ ſubtiliſſimæ, ſi quæ fuerit, interſtitia earum partium liberè pervadentis: adeò ut ratio quantitatum materiæ cenſenda ſit compoſita ex ratione magnitudinum, & ratione denſitatum.

Neque verò difficile id erit oſtendere. Nam quemadmodum clarè liquet, in corporibus homogeneis, ſive æqualiter denſis, illud plus materiæ continere, cujus major eſt moles, ſive magnitudo, & propterea quantitates materiæ eandem inter ſe rationem habere, quàm magnitudines, ſive moles corporum; ita quoque liquidò conſtat, in corporibus ejuſdem magnitudinis illud plus habere materiæ, cujus partes arctiùs conjunguntur, atque adeò materiæ quantitates in iis eſſe in ratione denſitatum. Quocirca in duobus quibuſvis corporibus, quæ neque ſint ejuſdem magnitudinis, neque ejuſdem denſitatis, neceſſe eſt, ut ratio quantitatum materiæ componatur ex ratione magnitudinum, & ratione denſitatum: ita ut in iis conferendis attendi debeat, tum ad magnitudines, cùm ad denſitates corporum, in quibus illas conſideramus.

Hinc quantitas materiæ cujuſque corporis repetenda eſt ex magnitudine, & denſitate conjunctim; & propterea definiri debet per productum, quod oritur multiplicando ma-

magnitudinem per densitatem. Sic aer in spatio duplicato fit duplus, in triplicato triplus; sed idem aer, densitate duplicatâ, in spatio etiam duplicato fit quadruplus, in triplicato sextuplus. Unde modò duo colligi possunt. Primum, quod si duo corpora eandem habeant materiæ quantitatem, magnitudines, sive moles ipsorum sint reciprocè suis densitatibus proportionales. Et alterum, quod si duorum quorumvis corporum magnitudines, sive moles reciprocam servent suarum densitatum rationem, eadem sit in utroque corpore quantitas materiæ.

Jam quum pondus cujusque corporis prope telluris superficiem quantitati suæ materiæ proportione correspondeat, definietur quoque pondus per productum, quod oritur, multiplicando magnitudinem per densitatem; adeòque quemadmodum datâ densitate, pondus erit, ut corporis moles, sive magnitudo; ita quoque datâ magnitudine, pondus erit, ut sola densitas. Sunt ergo densitates corporum, æquales moles habentium, ut pondera ipsorum. Sed si corpora diversas habuerint moles, sive magnitudines; tunc ratio densitatum componetur ex ratione directâ ponderum, & ratione inversâ magnitudinum: adeò ut densitas cujusque corporis definietur per relationem, quam

quam pondus ad molem, sive magnitudinem habet.

Vides ergo, quàm facilè definiantur densitates corporum per cognitam illam proprietatem, quod pondus cujusque corporis quantitati suæ materiæ proportione correspondeat. Sed, ut præclaræ hujus proprietatis demonstrationem aliam in medium afferamus, quæ nullum Tyronum animis scrupulum relinquat; notare prius oportet, diversum corporis situm respectu horizontis, diversamque corporis figuram efficere nullo pacto posse, ut pondus mutationem aliquam patiatur; quum experientia ipsa nos doceat, unumquodque corpus idem semper pondus retinere, quocumque modo positum sit respectu horizontis, nec ejus pondus augeri, vel minui, si ejusdem figura in aliam, atque aliam mutetur.

Inde verò sequitur, vim gravitatis, quæcumque ea sit, non tantùm agere in partes corporum exteriores, verùm etiam in partes interiores. Nam si vis gravitatis ageret in exteriores tantùm corporis partes, ageret utique in eam dumtaxat superficiem, quæ horizonti est aversa, atque adeò corporis pondus proportionale foret huic superficiei. Unde, quia pro vario corporis situ respectu horizontis, superficies horizonti aversa modò major, modò minor est; erit

cor-

corporis pondus, pro alio, atque alio situ, quem habet ad horizontem, modò majori, modò minori superficiei proportionale; atque ita non semper manebit idem, & immutatum, quemadmodum docet experientia, sed prout major, aut minor est corporis superficies horizonti aversa, sic & ipsum corporis pondus nunc majus, nunc minus evadet.

Quod si negas, vim gravitatis in eas tantùm exteriores corporis partes agere debere, quæ sunt horizonti aversæ, contendisque illam, relictis partibus internis, in omnes corporis partes exteriores actionem suam extendere; tunc equidem, etsi mutato corporis situ respectu horizontis, nulla ponderi contingat mutatio, nihilominus corporis figurâ in aliam, atque aliam mutatâ, oporteret, ut aliud, atque aliud resultaret inde corporis pondus. Enim verò mutatis figuris, mutatur externarum corporis partium numerus, sive multitudo; atque ita vis gravitatis, non semper in eundem partium numerum agens, neque idem semper pondus in corpore produceret. Unde, quia experientia docet, mutatis figuris, corporum pondera non mutari; consequens est, ut vis gravitatis agat in omnes corporis partes, & tam externas, quàm internas afficiat.

Atque his porrò argumentis, non solùm evincitur, vim gravitatis in omnes corporis partes operari, sed æqualiter quoque partes omnes afficere. Nam si ponamus, exēpli gratiâ vim gravitatis magis afficere partes horizonti aversas, quàm alias omnes, aut etiam magis in externas, quàm in internas operari; sequeretur, quod mutato corporis situ respectu horizontis, vel etiam mutatâ figurâ, mutari quoque deberet ipsum corporis pondus, quum non idem maneat numerus particularum, in quibus major est actio gravitatis. Quocirca, quia iis mutatis quotidie experimur, nihil mutationis ponderi corporis accedere; reliquum est, ut dicamus vim gravitatis, non modò in omnes corporis partes operari, verùm etiam æqualiter partes omnes afficere.

Ex hac autem, qua vis gravitatis operatur, ratione, facile modò erit ostendere, quod pondus cujusque corporis quantitati suæ materiæ proportione correspōdeat. Nam quum vis gravitatis subinde agat in corpora, ut singulas cujusque partes æqualiter afficiat, propter æqualem istam gravitatis actionem singulæ cujusque corporis particulæ æquales subibunt impressiones à gravitate. Jam verò pondus, sive gravitatio corporis totius est aggregatum ex gravitationibus particularum. Igitur si gravitatio, sive

sive impressio, quam una subit particula, toties repetatur, quotus est numerus particularum, quæ in corpore illo continentur, ea gravitatio sic repetita dabit pondus, sive gravitationem corporis totius.

Quorirca mensura ponderis cujusque corporis est numerus particularum, quæ in corpore illo continentur; nam quò major est earum partium multitudo, sive numerus, eò pluries impressio, quam una subit particula, est repetenda, ut totius corporis gravitatio habeatur. Unde, quia in unoquoque corpore per quantitatem materiæ non aliud intelligitur, quàm complexus, sive numerus particularum, quæ in corpore illo continentur; concludendum est, pondus, sive gravitationem cujusque corporis quantitati suæ materiæ proportione correspondere; & propterea duorum quorumvis corporum pondere prope superficiem telluris eandem inter se habere rationem, quæ inter eorundem materiæ quantitates intercedit.

Ex eleganti istâ proprietate, quod pondus cujusque corporis quantitati suæ materiæ proportione correspondeat, duo colligit Johannes Keill in suâ ad Veram Physicam Introductione. Primum est, quod gravitas in corporibus à pressione subtilis cujusdam materiæ nequeat oriri; nam inquit, si cor-

corpus deorſum à materiâ ſubtili quovis modo pellatur, vis qua pellitur neceſſariò erit, ut numerus particularum, quibus ſimul agentibus verſus terram truditur; ſed numerus particularum eſt ut corporis ſuperficies: quare erit vis, qua corpus deorſum premitur, ut ejuſdem ſuperficies, & non ut ipſius quantitas materiæ.

Alterum, quod vacuum non tantum ſit poſſibile, ſed actu detur. Nam ſi capiamus duos globos, unum plumbi, alterum ſuberis, æqualium magnitudinum, & eadem eſſet in utroque quantitas materiæ; per jam oſtenſa uterque globus æqualiter ponderaret. Experientiâ autem conſtat magnum eſſe in duobus hiſce globis ponderum diſcrimen. Itaque magnum quoque erit in iiſdem diſcrimen materiæ; & ſi plumbum ſubere ſit triplo gravius, triplo quoque major erit in plumbo contenta materia, quàm in ſubere. Sunt verò eædem utriuſque globi moles, ſive magnitudines. Quare plures erunt in plumbo pori, ſeu ſpatia abſolutè vacua; adeòque vacuum non tantùm poſſibile eſt, ſed actu datur.

Non hìc inquiram, num vis gravitatis à preſſione materiæ cujuſdam ſubtiliſſimæ ſit repetenda, neque etiam, num vacuum detur, aut dari poſſit; ſed notatu tantùm hoc loco dignum exiſtimo, adductis Keillii ratio-

tionibus, neque impossibilitatem mechanicæ illius gravitatem explicandi rationis ostendi, neque vacui existentiam adstrui. Nam primò etsi verissimum sit, vim quâ corpus pellitur esse, ut numerus particularum, quibus simul agentibus versus terram truditur; falsum tamen est, hunc numerum particularũ esse, ut corporis superficies; quia, ut vidimus in calce capitis antecedentis, correspondet multitudini particularum, corpus componentium, in quarum locum, ad servandum cum aliis æquilibrium, illæ subintrare conantur.

Secundò neque etiam sequitur dari vacuum ex eo, quod magnum sit ponderum discrimen in duobus globis æqualiũ magnitudinum, uno suberis, altero plumbi. Nam etsi rectè exinde deducatur, majorẽ esse quantitatem materiæ ponderosæ in plumbo contentam, quàm quæ continetur in subere; non hinc tamen concludendum est, in subere plura dari spatiola absolutè vacua, quia repleri possunt materiâ aliâ subtilissimâ, quæ molem corporis augere possit, pondus autem augere non possit. Itaque nisi priùs probetur, gravitatem esse materiæ essentialem, & ubicumque reperitur materia, ibi etiam gravitatem inesse; numquam hac viâ poterit vacui existentia suaderi.

Quin etiam, etsi fluidissimam illam mate-

te-

teriam, quæ corporum poros, sive interstitia replere ponitur, gravem, & ponderosam statuamus, quemadmodum eam satis adstruit Jacobus Bernoullius in suâ de gravitate ætheris dissertatione; non hinc tamen colligi potest, illam in suberis poris non reperiri, quia illius pondus non adauget. Nam quum in hac fluidissimâ materiâ innatent corpora omnia, necesse est, ut per ostensa ab Archimede in tractatu de insidentibus humido unumquodque corpus tantam proprii sui ponderis gravitatem amittat, quanta est gravitas molis non dissimilis ejus materiæ; adeòque sicuti aer vasis, quod replet, pondus in ipso aere non auget, ita subtilissima illa materia neque etiam augebit pondus corporis, cujus interstitia replet.

CAP. V.

De velocitate, & quantitate motus; ubi etiam de motu æquabili, & variabili.

TRadita sunt usque adhuc ea Statices principia, quæ corporum gravitatem respiciunt; sequuntur modò illa, quæ ad motum corporum in genere referuntur. Et primò quidem, quid sit motus, malim hìc supponere, quàm accuratâ definitione profe-

ſequi. Eſt enim motus ex earum rerum numero, quas nemo non intelligit, ſed quas velut ſimplices, & in ſuo genere primas nemo poteſt accuratè definire. Et quamquam non ſatis inter Philoſophos conveniat, num detur ſpatium à corporibus diſtinctum; attamen ne ullis hìc difficultatibus implicemur, poſtulamus, ut liceat nobis extenſionem concipere, undequaque infinitam, & immobilem, cujus partibus ſucceſſivè corpora ſe applicando, dici poſſint abſolutè moveri.

Quoniam autem omnino implicat, ut unum, idemque corpus ſimul, & eodem indiviſibili temporis momento diverſis extenſionis illius infinitæ, & immobilis partibus applicatum reperiatur; perſpicuum eſt, motum omnem tempus involvere, nec ullum fieri poſſe motum; niſi cum tempore. Quid verò ſit tempus, clariùs mente concipitur, quàm verbis exprimi poteſt. Tantū dicemus, illud poſſe cōſiderari velut fluxum æquabilem ſigni illius indiviſibilis, quod inſtans, ſive momentum communiter dicitur: eodem modo, quo Geometræ lineam ex fluxu puncti, ſuperficiem ex latione lineæ, corpus autem ex motu ſuperficiei ſuam originem habere concipiunt.

Ex eo porro, quod omnis motus cum tempore conjunctus ſit, ſuborta Mechanicis ve-

velocitatis consideratio, cujus nomine intelligunt id quod efficit, ut mobile datum iter, sive spatium in dato tempore percurrat. Est enim motus effectus spatium, quod mobile percurrit; sed quoniam ad spatium istud percurrendum non idem semper temporis impenditur, hinc factum, ut in corpore mobili præter motum ipsa motus velocitas distingueretur: adeo ut quemadmodum motus effectus est simpliciter spatium, quod percurritur; ita effectus volocitatis sit idem spatium, quatenus in certo tempore peragratur.

Hinc mensura velocitatis in unoquoque mobili est relatio, quam habet spatium ad tempus, hoc est spatium ad ipsum tempus applicatum. Sed spatium intelligi debet, quod mediante definiendâ velocitate percurritur. Unde si motus corporis ejusmodi fuerit, ut velocitas ejus continuò augeatur, vel minuatur; multum abest, ut ista definiri possit per spatium finito aliquo tempore descriptum, applicatum ad ipsum tempus; sed capienda est pars temporis infinitesima, & quam relationem habet spatium hac infinitesimâ temporis parte descriptum ad eandem temporis particulam, per eam definietúr velocitas, quam in illo temporis momento mobile habet, ut clariùs mox ostendetur.

Ex

Ex eo autem, quod definiatur velocitas per spatium, velocitate illâ percursum, ad tempus applicatum, erit mensura spatii ipsa velocitas per tempus multiplicata, & mensura temporis, id quod oritur, applicando spatium ad velocitatem. Quæ quidem omnia clariùs adhuc intelligentur, adhibito calculo algebraico, sive litterali. Nam si spatium dicatur $ſ$, tempus t, & velocitas u; quia ista definitur per relationem, quam habet spatium ad tempus, erit $u = \frac{ſ}{t}$; adeoque multiplicando per t, erit $tu = ſ$, hoc est spatium, ut velocitas per tempus multiplicata; & dividendo per u, erit $t = \frac{ſ}{u}$, hoc est tempus, ut spatium ad velocitatem applicatum.

Corpora mota vim ad agendum habere, nemo est, quem experientia illud non edoceat. Est autem hæc actio major, vel minor, tum pro majori, vel minori quantitate materiæ, quæ existit in corpore mobili, tum pro majori, vel minori velocitate, qua corpus idem urgetur. Unde non meliùs potest definiri, quàm per productum, quod oritur, multiplicando pondus, sive quantitatem materiæ corporis mobilis per velo-

 ci-

citatem ipsius.

Jam id, quod efficit, ut corpus mobile majorem, vel minorem actionem exerceat, momentum, sive quantitatem motus appellant Mechanici. Unde, quum causæ suis effectibus proportione correspondeant; definietur quoque momentum, sive quantitas motus cujusque mobilis, multiplicando pondus ejus per velocitatem: proindeque si momentum dicatur m, pondus p, & velocitas u, erit $m = pu$.

Habent ergo momenta duorum quorumvis corporum rationem compositam ex ratione ponderum, & ratione velocitatum. Quocirca si duo mobilia æquales habuerint velocitates, erunt momenta ipsorum, ut sola pondera; & si vicissim æqualia habuerint pondera, erunt eadem ipsorum momenta in solâ velocitatum ratione.

Quod si momenta duorum corporum sint æqualia, tunc ratio, quæ componitur ex ratione ponderum, & ratione velocitatum, erit ratio æqualitatis; adeòque pondera erunt inter se in reciprocâ velocitatum ratione. Et vicissim si pondera velocitatibus reciprocè correspondeant, necesse est, ut idem sit utriusque corporis momentum; quum ratio ponderum, & ratio velocitatum componant simul rationem æqualitatis.

Hæc omnia eleganter illustrari possunt per

per proportiones parallelogrammorum, ab Euclide ostensas in Elementis. Si enim pondera duorum quorumvis mobilium designentur per rectas AB, DE, eorumque velocitates referant rectæ BC, EF; erunt eorundem mobilium momenta, ut parallelogramma rectangula ABC, DEF: proindeque quæcumque demonstrata sunt de horum rectangulorum proportione, eadem quoque vera erunt de corporum momentis, hisce rectangulis proportionalibus. Fig. 3.

Quum corpora eandem semper habent motus quantitatem, dicuntur æquabili motu moveri; quotiescumque verò mutatur in iis quantitas motus, sive quia augetur, sive quia minuitur, tunc dicuntur moveri motu variabili; qui etiam dicetur acceleratus, si ejus quantitas continuò augeatur; dicetur verò retardatus, si quantitas ejusdem perpetuò minuatur.

Perspicuum est autem, quantitatem motus in corpore mobili non aliter mutari posse, quàm mutatâ velocitate. Unde dici potest etiam motus æquabilis, cujus velocitas maneat eadem, & immutata in omni temporis momento; motus acceleratus, cujus velocitas continuò crescit; & motus retardatus, cujus velocitas continuo minuitur.

Tam accelerati, quàm retardati motus in-

infinitæ esse possunt variationes, quum velocitas in iis infinitis modis augeri, aut minui possit. Sed speciatim dicetur motus æquabiliter acceleratus, cui temporibus æqualibus æqualia semper accedunt velocitatis incrementa; & vocabitur motus æquabiliter retardatus, cujus velocitas temporibus æqualibus æqualiter decrescit.

Quoniam autem motus æquabilis ille est, cujus velocitas in omni temporis momento manet eadem, & immutata; definietur spatium æquabili motu percursum per velocitatem ductam in tempus; quum in hunc modum ostensum sit superiùs definiendum esse spatium, quod certo tempore eâdem semper velocitate percurritur: adeòque si spatium dicatur f, tempus t, & velocitas u, omnia motus æquabilis symptomata hac formulâ continebuntur $f = tu$.

Inde itaque discimus primò, spatia motu æquabili percursa esse in ratione compositâ ex ratione temporum, & ratione velocitatum. Unde, si tempora fuerint æqualia, erunt ut solæ velocitates; & si vicissim æquales fuerint velocitates, erunt in solâ temporum ratione.

Discimus secundò, velocitates duorum mobilium, quæ feruntur æquabiliter, esse in ratione compositâ ex directâ spatiorum, & reciprocâ temporum. Unde si tempora fuerint

rint æqualia, erunt ut sola spatia directè; & si vicissim æqualia fuerint spatia, erunt ut sola tempora reciprocè.

Discimus denique, quod si duo mobilia ferantur æquabiliter, tempora, quibus duo quævis spatia percurrunt, sint in ratione compositâ ex directâ spatiorum, & reciprocâ velocitatum. Unde si velocitates fuerint æquales, erunt ut sola spatia directè; & si vicissim æqualia fuerint spatia, erunt ut solæ velocitates reciprocè.

Eximio Newtono solemne est, proportiones per duos tantùm terminos designare. quod equidem quum fit, non modò sermo contrahitur, verùm etiam nitidiores, clarioresque evadunt demonstrationes, in quibus proportiones illæ adhibentur. Unde, ut huic proportiones designandi modo Tyrones assuescant, non abs re erit recensita motus æquabilis theoremata Newtoniano quoque stylo proferre.

Itaque quantum ad primum, in hunc modum illud proponi debet: spatium æquabili motu descriptum est conjunctim, ut tempus directè, & velocitas itidem directè: unde dato tempore erit, ut sola velocitas directè; datâ verò velocitate erit directè, ut solum tempus.

Quantum ad secundum, debet illud hac ratione proferri: velocitas mobilis æquabi-

liter lati est coniunctim, ut spatium directè, & tempus inversè: unde dato tempore, erit, ut solum spatium directè; dato verò spatio erit, ut solum tempus inversè.

Et denique quantum ad tertium, proponendum est illud in hunc modum: tempus, quo mobile æquabiliter latum spatium aliquod describit, est conjunctim, ut spatium directè, & velocitas inversè: unde datâ velocitate erit, ut solum spatium directè; dato verò spatio erit, ut sola velocitas inversè.

Definitur ergo spatium, æquabili motu percursum, per id, quod producitur, multiplicando velocitatem per tempus: unde si
Fig. 3. recta AB designet tempus, & BC velocitatem; spatium tempore illo percursum designabitur per rectangulum ABC; atque ita quoque si DE referat tempus, & EF velocitatem, designabit rectangulum DEF spatium, quod illo tempore percurritur. Sed nō perinde designari potest spatium motu variabili descriptum, quandoquidem in motu variabili velocitas non manet semper eadem, quemadmodum in motu æquabili, sed perpetuò patitur mutationem.

Interim si capiamus spatium, quod infinitesimâ temporis particulâ describitur, nihil obstat, quo minùs illud designemus per velocitatem ductam in tempus. Etsi enim in motu variabili velocitas continuò mu-

mutetur, attamen in tempore indefinitè parvo poteſt velocitas illa, veluti conſtans, & immutata conſiderari; quum mutatio, quam patitur, velut indefinitè parva, tutò negligi poſſit: proindeque ſpatium, quod in tempore illo indefinitè parvo percurritur, veluti deſcriptum motu æquabili poterit haberi; adeòque optimè definietur per velocitatem ductam in tempus.

Atque hinc modò, ſi BMN fuerit curva talis, ut interea, ac abſciſſæ ejus AP, AQ Fig. 4. deſignant tempora, ordinatæ PM, QN, quæ abſciſſis iis ad rectos angulos correſpondent, referant velocitates, quas in fine eorum temporum corpus mobile habet, deſignabunt areæ curvilineæ APMB, AQNB ſpatia, in iiſdem illis temporibus à mobili deſcripta: in tantum, ut ſpatium deſcriptum tempore AP ſit ad ſpatium deſcriptum tempore AQ, ut eſt area APMB ad aream AQNB.

Dividamus enim tempus AP in particulas æquales, & indefinitè parvas AC, CE, EG, &c., ſintque CD, EF, GH ordinatæ correſpondentes abſciſſis AC, AE, AG. Itaque quia velocitas mobilis in tempore AC deſignatur per CD, ſpatium tempore illo deſcriptum erit, ut rectangulum ACD; atque ita quoque, quia in temporibus CE, EG velocitates mobilis deſignantur per ordina-

natas EF, GH, erunt ſpatia temporibus illis deſcripta, quemadmodum ſunt rectangula CEF, EGH.

Sunt igitur ſpatia deſcripta in temporibus AC, CE, EG, ut rectangula ACD, CEF, EGH. Sed hæc rectangula non differunt ſenſibiliter ab areis curvilineis ACDB, CEFD, EGHF. Quare eadem ſpatia erunt inter ſe in iſtâ arearum ratione; & propterea componendo ſpatium deſcriptum tempore AG erit, ut area tota AGHB. Unde etiam ſpatium deſcriptum tempore AP erit, ut area APMB; & ſpatium deſcriptum tempore AQ erit, ut area AQNB.

Areas iſtas curvilineas APMB, AQNB, deſignantes ſpatia, quæ temporibus AP, AQ à mobili deſcribuntur, vocabimus in poſterum plana velocitatum, utpote quæ exhibent nobis ordinatis ſuis velocitates, quas in ſingulis cujuſque temporis particulis corpus mobile habet. Unde oſtenſum theorema, quum occaſio dabit, in hunc modum proferemus: ſpatia motu variabili deſcripta ſunt, ut correſpondentia plana velocitatum; vel etiam ſtylo Newtoniano: ſpatium, quod deſcribitur à mobili motu variabili, eſt ut planum ſuæ velocitatis.

Hoc theorema obtinet etiam in motu æquabili. Nam ſi ponamus corpus in tempore AQ moveri æquabiliter velocitate QN, pla-

planum suæ velocitatis erit rectangulum AQNS, cui proportionale est spatium æquabili motu percursum; quandoquidem ordinatæ hujus rectanguli, velut æquales ubique ipsi QN, constantem velocitatem corporis æquabiliter moti in singulis temporis particulis rectè designant. Unde idem theorema efferri potest generaliter in hunc modum: spatium à mobili utcumque descriptum plano suæ velocitatis proportione correspondet.

Quum corpus aliquod variabili motu movetur, velocitatem, quam in fine temporis reperitur habere, finalem appellabimus. Sed quam proportionem habeat spatium, quod interea temporis describit, ad spatium, quod finali velocitate æquabiliter eodem tempore percurreret, ex dato plano suæ velocitatis haud difficile erit definire. Etenim si APMB sit planum suæ velocitatis, completo rectangulo APMR, erit spatium primum ad spatium secundum, ut APMB ad APMR; atque ita quoque si planum velocitatis sit AQNB, completo rectangulo AQNS, erit spatium primum ad spatium secundum, ut AQNB ad AQNS.

Verùm, ut hæc omnia uno, aut altero exemplo illustremus, ponamus primò motum corporis ita variari, ut velocitates prodeant continuò temporibus proportionales. Ita-

Itaque quia in hac hypothesi AP est ad AQ, ut PM ad QN, linea terminans plana velo-
Fig. 5. citatum mutabitur in rectam AMN; adeòque ipsa plana velocitatum erunt duo triangula similia APM, AQN; & propterea spatia, his triangulis proportionalia, erunt in duplicatâ ratione tam temporum, quàm velocitatum. Et quoniã rectangula APMR, AQNS sunt dupla eorundem triangulorum; erit quoque spatium, quod dato tempore percurritur, dimidium ejus, quod finali velocitate æquabiliter eodem tempore percurreretur.

Ponamus secundò mutationem motus talem esse, ut velocitates servent continuò duplicatam temporum rationem. Quia igi-
Fig. 6. tur in hac aliâ hypothesi AP quadratum est ad AQ quadratum, ut PM ad QN; linea terminans plana velocitatum erit parabola, verticem habens punctum A, & axim rectam AR. Unde quum plana velocitatum APM, AQN sint in triplicatâ ratione rectarum AP, AQ, in sesquiplicatâ verò rectarum PM, QN; erunt spatia, iis planis proportionalia, in triplicatâ ratione temporum, in sesquiplicatâ verò velocitatum. Quumque rectangula APMR, AQNS eorundem planorum sint tripla; erit quoque spatium, quod dato tempore describitur, tertia pars ejus, quod finali velocitate æquabiliter eodem

dem tempore deſcriberetur.

Quemadmodum figuram, in qua abſciſſæ deſignant tempora, ordinatæ velocitates, vocamus planum velocitatis; ita diſtinctionis gratiâ dicemus ſcalam velocitatis figuram, in qua ſpatia per abſciſſas, velocitates per ordinatas deſignantur. Atque hanc inter ſcalam, & planum diſtinctionem, non modò in deſignandis velocitatibus, verùm etiam in aliis motus functionibus exprimendis uſurpabimus; nam quotieſcumque aliqua motus functio tempori applicatur, figuram, quæ inde oritur, vocabimus planum illius functionis; quotieſcumque verò eadem illa functio applicatur ſpatio, dicemus figuram inde ortam ſcalam ejuſdem functionis. Unde ſpatiis ad tempora applicatis, orietur figura, quæ planum ſpatiorum appellabitur; ſed viciſſim applicatis temporibus ad ſpatia, proveniet figura, quæ ſcala temporum dicetur.

Sed nolim hìc ſilentio præterire, quòd ſi ſcala velocitatis fuerit reciproca, hoc eſt talis, ut ordinatæ in eâ reciprocè velocitatibus correſpondeant, eadem proportionalis ſit tempori, quo deſcribitur ſpatium, cui ſcala correſpondet. Sit enim AQNB ſcala iſta, ita ut deſignatis ſpatiis per abſciſſas AP, AQ, correſpondeant ordinatæ PM, QN reciprocè velocitatibus, quas mobile habet in fine tem- FIG. 7.

temporum, quibus ſpatia illa deſcribuntur. Dico tempus, quo deſcribitur ſpatium AP, deſignari per aream APMB, & tempus, quo deſcribitur ſpatium AQ, deſignari per aream AQNB.

Dividatur ſpatiū AP in particulas æquales, & indefinitè parvas PC, CE, EG, &c., ſintque CD, EF, GH ordinatæ correſpondentes abſciſſis AC, AE, AG. Itaque quia ſpatium PC, tamquam indefinitè parvum, conſiderari poteſt, veluti deſcriptū motu æquabili; erit idem, ut tempus, quo deſcribitur, & velocitas, quam mobile habet in tempore illo; adeòque tempus per PC, erit ut PC directè, & velocitas inversè. Unde quum ex hypotheſi velocitas inversè ſit, ut PM directè; erit tempus per PC, ut PC directè, & PM etiam directè; adeòque erit, ut rectangulum CPM, hoc eſt, ut areola CPMD.

Simili ratiocinio oſtendetur, quod tempus per CE ſit, ut areola ECDF; & tempus per EG ſit, ut areola GEFH. Quare componendo tempus per PG erit, ut area tota GPMH. Unde etiam tempus per AP deſignabitur per aream APMB, & tempus per AQ exprimetur per aream AQNB. Et igitur generaliter tempus, quo mobile ſpatium aliquod deſcribit, erit ut ſcala reciproca ſuæ velocitatis.

Ponamus jam ſpatia peracta eſſe in ratione

ne directâ velocitatum, quas mobile habet in fine temporum, quibus spatia illa describuntur. Erit igitur in hac hypothesi, ut AP ad AQ, ita QN ad PM; adeoque linea terminans scalam reciprocam velocitatum erit hyperbola æquilatera, habens pro suis asymptotis rectas AB, AP. Unde discimus, assumptam hypothesim impossibilem esse, nec posse in rerum naturâ locum habere. Nam, quum tempora, quibus describuntur spatia AP, AQ, sint ut correspondentes areæ hyperbolicæ APMB, AQNB; erit convertendo tempus per AP ad tempus per PQ, ut area infinita APMB ad aream finitã PQNM; adeoque ad percurrendum ab initio spatium finitum AB tempus requireretur infinitum.

Ponamus vicissim, spatia peracta servare rationem reciprocam velocitatum, quas mobile reperitur habere in fine temporum, quibus spatia illa describuntur. Quia ergo in hac aliâ hypothesi AP est ad AQ, ut PM ad QN; linea terminans scalam reciprocam velocitatum mutabitur in rectam AMN. Unde, quia tempora, quibus describuntur spatia AP, AQ, designantur per triangula similia APM, AQN; erunt tempora illa in duplicatâ ratione ipsorum spatiorum, & consequenter in duplicatâ ratione reciprocâ velocitatum, quas in in fine eorundem temporum mobile reperitur habere. FIG. 5.

CAP.

CAP. VI.

De vi motrice; ubi etiam de vi insitâ, sive passivâ materiæ.

Commune est Philosophantium votum, corpora omnia naturalia constare ex materiâ inerti, & otiosâ, ex qua non modò nullus in rerum naturâ motus, sed nec ulla ad motum tendentia potest oriri. Itaque, quum corpus aliquod, vel movetur, vel conatur se movere, præter ipsam corporis materiam, aliquid aliud concipi debet, ex quo motus corporis resultat, vel quod corpus ad motum concitat. Id autem, quodcumque sit, vim motricem, sive impressam deinceps appellabimus; motricem inquam, quatenus ab agente procedit; impressam verò, quatenus à patiente recipitur.

Interim notetur hoc loco velim, quod etsi in materiâ, velut inerti, & otiosâ, nulla adsit vis activa, sive motrix; admitti tamen debeat in eâ vis quædam passiva, consistens in renixu illo, quo viribus impressis reluctatur; quum alioquin nullam istis remoram posset afferre. Neque enim putandum est, resistere corpora viribus externis propter quietem; quia sicuti quies non suscipit magis, & minus, ita oporteret, ut eadem esset

ſet in corporibus omnibus reſiſtentia. Neque etiam credendum eſt, vim illam ad reſiſtendum oriri à gravitate, quia experientiâ conſtat, eam corpora exercere, etiam dum rectà deſcendunt.

Oritur ergo in corporibus vis reſiſtentiæ ab ipsâ materiâ; indeque eſt, ut major ſit, ubi major eſt copia materiæ; & minor, ubi minor materiæ quantitas exiſtit. Hinc rectè eam Johannes Keplerus, Aſtronomus ſummus, vim vocavit inertiæ; quia ſcilicet ab inertiâ ipſius materiæ profluit. Sed eandem Angli cum ſuo Newtono vocant etiam vim inſitam, quia nempe non extrinſecùs advenit materiæ, quemadmodum vis motrix, ſed in ipſo materiæ ſinu reperitur.

Per vim iſtam inſitam materiæ conatur unumquodque corpus perſiſtere in illo ſtatu, in quo ſemel eſt collocatum. Unde etſi nullus ex eâ motus oriatur, inſeruit tamen ad motum impreſſum conſervandum; quia ſicuti per eam corpus, quod quieſcit, ſemper in quiete manebit, niſi adſit vis aliqua ad motum in eo producendum; ita corpus, quod movetur, ſemper & eodem tenore movebitur, niſi per vim novam, & contrariam motus ejus ſiſtatur, deturbetur, aut utcunque inflectatur.

Non me latet, adeſſe Philoſophos quoſdam, qui facile quidem concedunt, nullum cor-

corpus posse se ipsum movere, hoc est per se ex quiete ad motum transire; sed non æquè lubenter admittunt, corpora semel mota non posse per se ad quietem tendere; eò quod videant projectorum motus paulatim languescere, tandemque ipsa mobilia ad quietem pervenire. Verùm pravam ipsorum opinionem, ex infantiæ præjudiciis haustam, abundè convellunt corpora cœlestia, quorum motibus post multa annorum millia nihil quicquam videtur detractum; & cœteroquin, quantum ad motus projectorum, existimandum est, idcirco ea tandem aliquando quiescere, quia aer eorum motui resistit, adeòque tantum necesse est ut amittant de motu suo, quantum cum aere communicant.

Desinant itaque Philosopi de causâ continuati motus tot lites instituere; quum non aliunde ea repeti debeat, quàm ex vi insitâ materiæ, per quam conatur unumquodque corpus in eo statu persistere, in quo semel est positum. Et desinant quoque communicati motus causam indagare; nam quum videmus, exempli gratiâ, lapidem ex manu projicientis emitti tanto cum impetu, id non aliunde oriri putandum est, quàm quia lapis in manu contentus, velut unicum cum eâ corpus constituens, participat de motu ipsius manus; adeòque, ubi à manu se-

sejungitur, per vim insitam materiæ adhuc in eodem motu necesse est, ut perseveret, donec ab agente externo impediatur.

Ob eandem vim insitam materiæ fit etiam, ut omnis motus, quantum in se est, tendat fieri secundùm lineam rectam; nam ratione ejus necesse est, ut corpus semel motum pergat moveri eodem, quo cœpit, modo, nisi à viribus externis deturbetur; atqui omnis motus ab initio est rectilineus, quum orbes curvilinei non aliud sint, quàm polygona laterum infinitorum. Unde etiam vis centrifuga, sive conatus ille recedendi à centro motus, quem habent corpora in orbem acta in omni suæ orbitæ puncto, per rectam lineam, orbitam in puncto illo contingentem, ab eâdem vi insitâ materiæ repeti debet; quandoquidem ubi corpus unum ex infinitis lateribus, orbem curvilineum constituentibus, describit, necesse est, ut ratione suæ inertiæ conatum habeat perseverandi suum motum per ejusdem illius lateris longitudinem; adeòque per rectam lineam, quæ orbem in loco illo contingit.

In eâdem vi insitâ materiæ fundatur quoque lex illa naturæ, adeò celebris apud Philosophos mechanicos nostri temporis, quòd cuilibet actioni æqualis, & contraria sit semper reactio. Nam, quum unum corpus agit in aliud, actio illa eò tendit, ut tollat

 in

in corpore patiente renixum, qui oritur ex ejus vi insitâ. Unde etsi in corpore agente major sit vis ad agendum, quàm in corpore patiente vis ad resistendum; non hinc tamen in mutuâ earum virium collisione vis tota corporis agentis impenditur, sed tantùm portio, quæ adæquat vim corporis patientis; quandoquidem vis reliqua, quum nullam habeat resistentiam, vel renixum absorbendum, in actionem influere nequit.

Sed de vi insitâ materiæ, quæ hactenus dicta sunt, sufficere videntur; redeamus ad vim impressam, sive motricem, unde motus corporibus accedit. Hæc, etsi fortasse simplex, & unica, ac ex eodem ubique principio repetenda, multiplicis tamen formæ in hac rerum universitate se prodit. Neque enim eodem modo nobis se manifestat in gravibus rectà tellurem petentibus, ac in magnete ferrum ad se trahente; neque etiam eadem est ratio ejus in motu locali fluidorum, ac in eorundem fermentatione, sive motu intestino. Verùm, ut vires omnes, quæ in rerum naturâ sunt, aut fingi possunt, in certas classes distinguam; aptiùs quidquam afferre nescio, quàm ut dicam, aliquas ipsarum esse vagas, nec fixum aliquod punctum respicere; alias verò centrales, & corpora versus punctum aliquod, tanquam centrum, indesinenter urgere.

Vi-

Vires istas centrales Recentiores post Newtonum appellant quoque vires centripetas, quia corpora viribus iis agitata, quocumque in loco reperiantur, conantur semper petere centrum illud, ad quod vires diriguntur. In harum virium numero ponenda est vis gravitatis in corporibus terrestribus, quippe quæ tellurem versus ipsa corpora terrestria urget. Atque ejusdem indolis sunt quoque vires, quibus planetæ revolvuntur, ac in orbibus suis detinentur, quippe quæ in primariis tendunt ad Solem, in secundariis ad suos primarios diriguntur.

Viribus istis centralibus, sive centripetis contrariæ sunt semper vires centrifugæ, quæ à nonnullis vocantur etiam conatus excussorii: nam quemadmodum per vim centripetam corpus conatur semper accedere ad punctum, versus quod vis ipsa dirigitur; ita per vim centrifugam ab eodem illo puncto continuò recedere conatur. Unde quum corpora in orbem aguntur, atque adeò nec ad centrum virium semper accedunt, nec ab eo continuò recedunt; duæ illæ vires contrariæ centripeta, & centrifuga debent inter se mutuò certâ quadam ratione æquilibrari.

Per solam vim centripetam fieri nunquam potest, ut corpus circa centrum vi-

rium in orbem agatur, sed necesse est, ut corpori imprimatur motus projectilis, ut præter vim centripetam, vim quoque centrifugam nanciscatur. Hinc solius gravitatis ope nequeunt motus planetarum explicari, neque ideo intelligi potest, qua ratione sola gravitas possit esse generale motus principium: nisi dicere velimus cum Platone, planetas omnes, quum primum Dei manibus fuerint fabricati, vi gravitatis motu recto fuisse agitatos, sed postquam ad determinata loca venissent, paulatim in gyrum revolvi cœpisse velocitate illâ, quam in descensu sibi compararunt.

Jam cujusque naturæ sit vis motrix, quæ motum in corpore producit, ea non aliter debet definiri, quàm per relationem, quam motus, vi illâ genitus, habet ad tempus, quo generatur, hoc est per motum applicatum ad tempus. Est enim axioma metaphysicum, ultro ab omnibus admittendum, ut causæ effectibus, quos producunt, sint semper adæquatè proportionales. Quocirca, quia vis motrix, dum corpori applicatur, non alium producit effectum, quàm motum ipsius corporis; per eundem hunc motum, velut suum effectum, definienda erit ipsa vis motrix. Sed necesse est, ut motus ad tempus applicetur, quia quò major est vis, eò minus temporis requiritur, ut data motus quan-

quantitas in corpore producatur.

Sunt ergo vires motrices duorum corporum, ut motus geniti directè, & tempora, quibus generantur, inversè. Unde quemadmodum si tempora sint æqualia, erunt in directâ ratione motuum genitorum, ita vicissim, si motus geniti sint æquales, erunt in ratione reciprocâ temporum. Sed exinde liquet etiam, motus genitos esse ut vires, & tempora conjunctim; adeoque quemadmodum in temporibus æqualibus sunt in solâ ratione virium; ita vicissim, quum vires sunt æquales, erunt in solâ ratione temporum.

Quoniam autem motus cujusque corporis definitur per quantitatem materiæ ductam in velocitatem; perspicuum est, vim motricem designari quoque posse per id, quod oritur, applicando ad tempus productum ex velocitate, & quantitate materiæ. Unde si data fuerit materiæ quantitas, eadem vis motrix definietur per relationem, quam velocitas genita habet ad tempus; adeòque erit, ut velocitas directè, & tempus inversè: ex quo colligi potest, velocitatem, quam vis motrix generat in dato corpore, definiendam esse per vim ipsam ductam in tempus.

Quod dicimus de datâ quantitate materiæ, obtinet, quotiescumque vis motrix in-

indefinenter agit in corpus, nec eadem semper perseverat; veluti est vis gravitatis, quæ grave corpus continuò urget, sed decrescit in duplicatâ ratione distantiæ à centro, ad quod dirigitur. Si enim definienda esset vis ista unoquoque temporis momento, nulla quantitatis materiæ ratio oportet habeatur, quia jugiter in unum, idemque corpus actionem suam exercet: proindeque satis erit, illam designare per velocitatem, momento illo temporis genitam, ad tempus ipsum applicatam.

Itaque vis, quæ agit in datum corpus, unoquoque temporis momento est, ut velocitas, quam tunc temporis generat, directè, & tempus ipsum inversè. Sed quoniam velocitas definitur per relationem, quam habet spatium ad tempus; perspicuum est, eandem illam vim esse, ut spatium directè, & quadratum temporis inversè. Unde sequitur spatia, quæ unum, idemque corpus duabus quibusvis viribus initio motus describit esse, ut vires, & quadrata temporum conjunctim.

Verùm ut præclara ista theoremata Tyronum mentibus algebraico calculo altiùs inhæreant, vocetur vis motrix w, motus genitus m, & t tempus, quo motus ille generatur. Itaque, quia vis motrix definitur per relationem, quam motus genitus habet

ad

ad tempus, erit $w = \frac{m}{t}$; adeòque multiplicando per t, erit $tw = m$: id, quod ostendit, motum genitum definiendum esse per vim motricem ductam in tempus.

Ulterius, si quantitas materiæ, contenta in corpore, cui vis motrix est applicata, vocetur q, & dicatur u velocitas genita in tempore t; erit $m = qu$: proindeque si loco m ponatur valor iste in formulâ $w = \frac{m}{t}$; habebitur $w = \frac{qu}{t}$: ex quo patet, eandem vim motricem definiendam esse, per id, quod oritur, applicando ad tempus productum ex velocitate, & quantitate materiæ.

Assumamus autem q tamquam unitatem: id, quod indicabit, datam esse quantitatem materiæ, contentam in corpore, cui applicata est vis motrix. Fiet igitur $w = \frac{u}{t}$; adeòque vis motrix erit, ut velocitas directè, & tempus inversè. Quumque multiplicando per t, habeatur $wt = u$; patet, velocitatem, quam in dato corpore generat vis motrix, definiendam esse per vim ipsam motricem ductam in tempus.

Vocetur denique $\int$ spatium, quod percurritur velocitate u in tempore t. Erit itaque $u = \frac{\int}{t}$: unde, si loco u ponatur valor iste in formulâ $w = \frac{u}{t}$, erit $w = \frac{\int}{tt}$: id, quod indicat vim motricem, quæ agit in datum corpus, definiendam esse per spatium ad quadratum temporis applicatũ. Quumq; multiplicando per tt, fiat $wtt = \int$, liquet rationem spatiorum, quæ ab uno, eodemque corpore duabus quibusvis viribus initio motus describũtur, componi ex ratione virium simplici, & ratione temporum duplicatâ.

Quum corpus motum suum accelerat continuò, necesse est, ut vis motrix unoquoque temporis momento agat in corpus, quæ manebit semper eadem, & invariata, si motus corporis sit æquabiliter acceleratus; mutationem verò patietur indesinenter, si incrementa velocitatum, quæ corpus suscipit, temporibus proportione non correspondeant. Jam juxta ea, quæ superiori capite dicta sunt, vocetur planum virium, figura, quæ oritur applicando vim motricem ad tempus; & scala virium figura, quæ nascitur, applicando eandem vim motricem ad spatium. Quibus positis, sequentia duo theoremata sunt nobis ostendenda.

Pri-

Primum eſt, quod planum virium ſit, ut velocitas, quam corpus habet in fine temporis, cui planum correſpondet. Alterum, quod ſcala virium ſit, ut quadratum velocitatis, quam reperitur corpus habere, poſtquam peragravit ſpatium, ad quod ſcala refertur. Unde tertium ſuâ ſponte profluit: nimirum, quod ſi ſpatium, ad quod refertur ſcala virium, deſcribatur in tempore, cui planum correſpondet; ſcala ipſa ſit in duplicatâ plani ratione.

Sit igitur primò AQNB planum virium, adeò ut deſignatis temporibus per abſciſſas AP, AQ, referant ordinatæ correſpondentes PM, QN vires, quæ agunt in corpus in fine eorum temporum. Oſtendendum eſt ergo, velocitatem, quam corpus habet in fine temporis AP, deſignari per aream APMB; pariterque velocitatem, quam corpus reperitur habere in fine temporis AQ, deſignari per aream correſpondentem AQNB. FIG. 4.

Dividatur etenim tempus AP in particulas æquales, & indefinitè parvas AC, CE, EG, ſintque CD, EF, GH ordinatæ correſpondentes abſciſſis AC, AE, AG. Itaque, quia vis motrix, quæ agit in corpus in tempore AC, deſignatur per CD; erit velocitas tempore illo genita, ut rectangulum ACD; atque ita quoque, quia in temporibus CE, EG vires motrices deſignantur per ordinatas

tas EF, GH erunt velocitates temporibus illis genitæ, quemadmodum sunt rectangula CEF, EGH.

Sunt ergo velocitates genitæ in temporibus AC, CE, EG, ut rectangula ACD, CEF, EGH. Jam ista rectangula non differunt sensibiliter ab areis curvilineis ACDB, CEFD, EGHF. Quare eædem velocitates erunt in istâ arearum ratione; & propterea componendo velocitas genita tempore AG erit, ut area tota AGHB. Unde etiam velocitas genita tempore AP erit, ut area APMB; & velocitas genita tempore AQ erit, ut area AQNB.

FIG. 8. Sit secundò AQNB scala virium, & AQS scala velocitatum, ita ut designatis spatiis per abscissas AP, AQ, referant ordinatæ PM, QN vires, quæ agunt in corpus in fine temporum, quibus spatia illa percurruntur, & ordinatæ PR, QS velocitates, quas corpus reperitur habere in fine eorundem temporum. Ostendendum est igitur, aream APMB esse ad aream AQNB, ut PR quadratum ad QS quadratum.

Dividatur spatium AP in particulas æquales, & indefinitè parvas PC, CD, &c., & ducantur per puncta C, & D rectæ lineæ EF, GH parallelæ ipsi MR. Erigatur ex puncto R recta RO perpendicularis, & æqualis ipsi PR; & junctâ PO agantur rectæ

FT,

FT, HV ipsi RO parallelæ, quæ conveniant cum FO in punctis T, & V; eritque propter similitudinem triangulorum PRV, PIT, PKV, IT æqualis PI, sive CF, & KV æqualis PK, sive DH.

Quia igitur ordinatæ CF, PR designant velocitates, quas corpus habet in fine temporum per AC, AP; designabit earum ordinatarum differentia IR velocitatem acquisitam in tempore per PC; adeoq; CE, quæ designat vim motricem, agentem in corpus in tempore per PC, erit, ut IR directè, & tempus per PC inversè; & consequenter area PCEM, quæ non differt sensibiliter à rectangulo PCE, erit ut IR directè, PC etiam directè, & tempus per PC inversè.

Jam verò, quum spatium PC describatur velocitate, designatâ per rectam CF, quantitas, quæ est, ut PC directè, & tempus per PC inversè, designari potest per rectam CF, sive IT; quum velocitas sit, ut spatium directè, & tempus inversè. Quare eadem area PCEM erit, ut IR directè, & IT etiam directè; adeòque erit, ut area OTIR, quæ à rectangulo TIR sensibiliter non differt.

Simili raticinio ostendemus, quod area CDGE sit, ut area TVKI. Quare componendo area PDGM erit, ut area OVKR; & consequenter area tota APMB erit, ut triangu-

gulum OPR, hoc est ut dimidium quadrati, quod fit ex PR. Unde, quum eodem argumento area AQNB fit, ut dimidium quadrati, quod fit ex QS; erit ut area APMB ad aream AQNB, ita PR quadratum ad QS quadratum.

Jam ope horum theorematum, sive detur relatio, quam vis habet ad tempus, sive relatio, quam vis habet ad spatium, facilè semper erit velocitatem definire; quandoquidem in primo casu dabitur planum virium, cui velocitas proportione correspondet; in secundo verò casu dabitur scala virium, cui proportionale est semper quadratum velocitatis. Sed ope eorundem theorematum definietur quoque vis motrix, sive sit data relatio inter velocitatem, & tempus, sive sit data relatio inter velocitatem, & spatium.

Quod ut liquidò constet, ponamus primò, velocitatem esse semper tempori proportionalem. Itaque si AQNB sit planum
FIG. 4. virium, quia ostensum est, aream APMB esse ad aream AQNB, ut est velocitas genita in tempore AP ad velocitatem genitam in tempore AQ; fiet in hac hypothesi, ut area APMB ad aream AQNB, ita tempus designatum per AP ad tempus designatum per AQ. Unde quum areæ APMB, AQNB sint, ut bases, quibus insistunt, AP, AQ; erunt

eæ

eæ parallelogramma duo in iisdem parallelis constituta: proindeque, quum BMN fiat recta ipsi AQ parallela, erit vis motrix in omni temporis momento eadem, & invariata.

Ponamus secundò, velocitatem esse semper in duplicatâ temporis ratione. Itaque velocitas genita in tempore AP erit ad velocitatem genitam in tempore AQ, ut est AP quadratum ad AQ quadratum: proindeque quum ostensum sit, velocitatem genitam in tempore AP esse ad velocitatem genitam in tempore AQ, ut est area APMB ad aream AQNB; fiet ex æquali, ut area APMB ad aream AQNB, ita AP quadratum ad AQ quadratum. Unde, quum areæ illæ debeant esse duo triangula similia, concidentibus punctis A, & B, mutabitur BMN in rectam AMN; adeòque vires PM, QN erunt in ratione temporum AP, AQ: id quod ostendit, assumptam hypothesim impossibilem esse; quum in principio motus vis motrix fiat nulla, nec proinde unquam corpus possit moveri. Fig. 5.

Non dissimiliter determinabimus vim motricem ex datâ relatione inter velocitatem, & spatium. Ponamus etenim primò velocitatem esse semper in subduplicatâ spatii ratione. Itaque si AQNB sit scala virium, & AQS scala velocitatum, spatia AP, Fig. 8.

AQ

AQ erunt, ut quadrata velocitatum PR, QS. Ostensum est autem, aream APMB esse ad aream AQNB, ut est PR quadratum ad QS quadratum. Quare erit ex æquali, ut area APMB ad aream AQNB, ita AP ad AQ; adeoque, quum areæ APMB, AQNB sint, ut bases, quibus insistunt AP, AQ, erunt eæ parallelogramma duo in iisdem parallelis constituta. Unde, quia linea terminas scalam virium BMN mutatur in rectam ipsi AQ parallelam, manebit vis motrix unoquoque temporis momento eadem, & immutata.

Ponamus secundò, velocitatem spatio semper proportione correspondere. Itaque posito rursus, quod AQNB sit scala virium, & AQS scala velocitatum, erit ut AP ad AQ, ita PR ad QS. Jam verò ex superiùs ostensis, area APMB est ad aream AQNB, ut PR quadratum ad QS quadratum. Igitur erit ex æquali, ut area APMB ad aream AQNB, ita AP quadratum ad AQ quadratum: proindeque quum areæ illæ debeant esse duo triangula similia, coincidentibus punctis A, & B, linea terminans scalam virium mutabitur in rectam AMN, eruntque adeò vires PM, QN in ratione spatiorum AP, AQ: quod argumento nobis esse potest, assumptam hypothesim impossibilem esse; quum hìc quoque vis motrix prodeat nulla in principio motus.

FIG. 5.

Quód

Quod si definienda esset vis motrix ex datâ relatione inter spatium, & tempus, oporteret primò determinare velocitatem per alterutrum duorum theorematum, quæ antecedenti capite demonstravimus, nempe quod planum velocitatis spatio, scala verò velocitatis reciproca tempori proportione correspondeat. Nam determinatâ velocitate, quia datur, tam relatio inter velocitatem, & spatium, quàm relatio inter velocitatem, & tempus; facile deinde erit per ea, quæ modò ostensa sunt, definire vim motricem tum in ordine ad spatium, cùm in ordine ad tempus.

Vides igitur adducta circa vires motrices theoremata adeò quidem generalia esse, ut non solùm omnes motuum genitorum functiones in quacumque virium hypothesi determinent, ac definiant, sed etiam facili negotio ostendant, quæ hypotheses possibiles sint, & quas vice versâ natura ferre recuset. Generaliter autem pronunciari debent impossibiles, & imaginariæ omnes illæ hypotheses, in quibus linea terminans, sive planum, sive scalam virium transit per initium sive temporis, sive spatii; quandoquidem, propter ordinatam illic evanescentem, utroque casu vis motrix fit nulla in principio motus. Quæ etiam impossibilitas patebit in determinatione temporis, quod

quod requiritur ad percurrendum ab initio ſpatium aliquod finitum; quippe quod infinitum ſemper invenietur, quum hypotheſis in naturâ locum nequit habere.

CAP. VII.

De directione virium, & motuum; ubi de eorundem compoſitione, & reſolutione.

TAm in motu, quàm in vi motrice conſideranda eſt directio, ſive determinatio. Linea enim, ſecundùm quam agit in corpus vis motrix, vocatur directio vis motricis. Linea verò, ſecundùm quam tendit corpus mobile, directio motus appellatur. Quemadmodum autem omnis motus proportionalis eſt ſemper vi motrici impreſſæ, & ſi vis in dato tempore motum aliquem generet, dupla duplum, tripla triplum generabit; ita idem motus in eandem continuò plagam cum vi motrice determinatur, fitque ſemper ſecundùm eandem rectam lineam, qua vis illa agit in corpus: unde datâ directione vis motricis, dabitur etiam directio motus, quia utraque per eandem lineam repræſentatur.

Verùm id tunc demùm verum eſt, quum una tantùm vis motrix agit in corpus. Nam ſiquidem duabus, aut pluribus viribus corpus

pus urgeatur, quarum diversæ sint directiones; tunc motus ejus fieri potest per rectam lineam, diversam ab unaquaque illarum directionum. Hæc autem, ut pro quolibet numero virium definiatur, ostendendum est prius hoc theorema, quod si corpus aliquod duabus viribus urgeatur secundùm latera alicujus parallelogrammi, illud viribus conjunctis describat diagonalem ejus parallelogrammi eodem tempore, quo viribus separatis describeret latera.

Hoc pacto, si corpus aliquod vi solâ M impressâ in loco A ferretur dato tempore uniformi cum motu ab A ad B; idemque vi solâ N impressâ eodem in loco ferretur itidem uniformiter eodem illo dato tempore ab A ad C: completo quidem parallelogrammo ABDC, viribus ambabus feretur corpus, uniformi etiam cum motu, eodem temporis spatio, ab A ad D; adeòque describet viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi AD eodem tempore, quo viribus separatis describeret latera AB, AC. FIG. 9.

Id autem hac ratione demonstratur. Quoniam vis posterior N urget corpus secundùm lineam AC ipsi BD parallelam; ea nequaquam impediet, ut corpus per vim priorem M accedat ad rectam illam BD. Itaque in dato illo tempore per vim primam M accedet corpus ad lineam BD, sive vis altera

N imprimatur, sive non: proindeque in fine illius temporis reperietur corpus alicubi in lineâ illâ BD,

Eodem argumento, quia vis prior M urget corpus secundùm lineam AB, ipsi CD parallelam; ea nequaquam corpori erit impedimento, ut per vim alteram N accedat ad rectam illam CD, Quocirca in eodem illo dato tempore per vim posteriorem N accedet corpus ad lineam CD, sive vis prior M imprimatur, sive non: Et igitur in fine ejusdem temporis reperietur corpus alicubi in lineâ illâ CD,

Quum itaque in fine illius dati temporis reperiri debeat corpus, per vim primam M alicubi in lineâ BD, & per vim alteram N alicubi in lineâ CD; quò ambabus satisfaciat viribus, necesse est, ut reperiatur in puncto aliquo, quod commune sit, tum lineæ BD, cùm lineæ CD. Unde, quum duæ istæ rectæ lineæ se secent in unico puncto D, in puncto isto corpus in fine temporis reperietur; & propterea feretur per diagonalem AD, quum ab A ad D pergat motu rectilineo, nec ulla sit causa externa, per quam à motu illo possit deturbari.

Quoniam autem momentum hujus rationis non peræquè ab omnibus intelligitur, non gravabimur aliam ejusdem theorematis demonstrationem afferre, quæ nullum dubi-

bitandi locum relinquat. Et primò quidem, quia nõ tam facilè omnes intelligunt, quo pacto fieri possit, ut unum, idemque corpus possit simul, & eodem tempore viribus duabus ad diversas partes tendentibus agitari; concipiamus, quod eodem tempore, quo corpus aliquod vi unâ agitatum fertur æquabiliter super rectâ AB ab A ad B, recta ipsa AB per vim alteram moveatur itidem æquabiliter super rectâ AC, ita ut maneat semper sibi ipsi parellela. Sic enim corpus illud subiens quoque motum rectæ AB, super qua motu proprio cietur, urgebitur duplici vi, unâ ab A ad B, alterâ ab A ad C.

Ponamus porrò, quod eodem tempore, quo corpus, super rectâ AB motum, pertingit ad punctum B, recta ipsa AB perveniat ad positionem CD; hocque posito facile erit ostendere per ea, quæ superiùs demonstrata sunt de spatiis æquabili motu percursis, corpus utrâque vi agitatum describere diagonalem AD. Nam primò, quum ex hypothesi recta AB perveniat ad positionem CD eodem tempore, quo corpus, motum super rectâ AB, pertingit ad punctum B; perspicuum est corpus utroque illo motu reperiri in fine temporis in puncto D, quandoquidem coincidente rectâ AB cum rectâ CD, coincidet quoque punctum B cum puncto D.

 Et

Et secundò, si ponamus rectam AB parallelo suo motu pervenisse ad quamvis aliam positionem EF, corpus verò ipsum, motum super rectâ AB, pervenisse ad punctum G; erit AE ad EG, ut est velocitas rectæ lineæ corpus deferentis ad velocitatem propriam ipsius corporis. Jam verò ratio istarum velocitatum æqualis est rationi, quam habent inter se latera AC, AB; quum longitudines horum laterum eodem tempore velocitatibus iis percurrantur. Itàque erit ex æquali, ut AE ad EG, ita AC ad AB; & propterea per vigesimam sextam sexti elementorum locabitur punctum G in diagonali AD.

Ostenso hoc theoremate, haud difficile erit lineam definire, per quam tendit corpus mobile, quum duabus, aut pluribus viribus ad diversas partes tendentibus simul, & eodem tempore urgetur. Si enim corpus urgeatur duabus tantùm viribus, quarum directiones, & quantitates designentur per latera AB, AC; completo parallelogrammo ABDC, movebitur corpus, ut ostensum est, per diagonalem AD. Sed si duabus iis viribus accedat tertia, cujus quantitatem, & directionem designet recta AH; completo parallelogrammo ADIH, feretur corpus per diagonalem AI. Et si porrò iisdem viribus superveniat quarta AK,

com-

completo parallelogrammo AILK, diriget motum suum corpus per diagonalem AL: eodemque artificio progredi licebit in infinitum.

Neque verò difficile id erit ostendere. Nam semper ac corpus viribus AB, AC describit diagonalem AD; vires illæ simul tantùm poterunt in corpus, quantum vis unica designata per diagonalem ipsam AD; adeòque, quum corpus urgetur tribus viribus AB, AC, AH, perinde erit, ac si ad motum concitetur duabus tantùm viribus AD, AH. Unde, quia duabus hisce viribus ad motum concitatum, describit per ostensum theorema diagonalem AI; concludendum est, eandem à corpore diagonale describi etiam, quum urgetur tribus viribus AB, AC, AH.

Eâdem ratione semper ac corpus viribus AB, AC, AH describit diagonalem AI, vires illæ simul tantam exerent actionem in corpus, quantam exercebit vis unica, designata per diagonalem ipsam AI; adeòque quum corpus urgetur quatuor viribus AB, AC, AH, AK perinde erit, ac si ad motum concitetur duabus tantùm viribus AI, AK. Jam verò duabus hisce viribus concitatum corpus ad motum, describit vi ostensi theorematis diagonalem AL. Et igitur consequens est, ut eadem à corpore diagonalis describatur,

tur, etiam quum urgetur quatuor viribus AB, AC, AH, AK.

Atque hinc modò patet virium compositio, & resolutio, adeò felici successu à Philosophis mechanicis nostri temporis in motibus corporum expendendis adhibita. Quum enim vires duæ AB, AC tantundem agant in corpus, quantum vis designata per diagonalem AD, componetur vis ista AD ex viribus lateralibus AB, AC. Unde etsi corpus haud quidem esset duplici illâ vi agitatum, sed vi simplici, ac indivisâ feratur per diagonalem AD; adhuc tamen vis ista supponi potest composita ex viribus per latera AB, AC, & in eas velut suas partes resolvi; quandoquidem si corpus iis viribus urgeretur, non aliam lineam percurreret, quàm diagonalem ipsam AD.

Et igitur generaliter, si super aliquâ rectâ lineâ, velut diagonali, parallelogrammum aliquod describatur, vis per illam rectam lineam supponi potest composita ex viribus per latera descripti parallelogrammi, atque adeò in easdem illas resolvi, tanquam in suas partes. Sed quoniam super eâdem rectâ lineâ, velut diagonali, infinita possunt parallelogramma describi, innumeræ quoque erunt vires laterales, ex quibus supponi potest composita vis, quæ per illam rectam lineam agit. Unde liquet, quod etsi datis viribus com-

componentibus, earumque directionibus, illicò detur vis composita, non tamen vicissim datâ vi compositâ, dentur etiam vires componentes, earumque directiones.

Præterea una, eademque vis, non modò ex duabus, verùm etiam ex tribus, quatuorve composita supponi potest. Nam quemadmodum vis per diagonalem AL supponi potest composita ex viribus per latera AK, AI; ita si super AI, velut diagonali, parallelogrammum describatur ADIH, vis per AI considerari potest veluti composita ex viribus per latera AD, AH: ex quo fit, ut vis per rectam AL haberi possit tamquam composita ex viribus per rectas AD, AH, AK. Et eâdem ratione, si super AD, tamquam diagonali, parallelogrammum aliud describatur ABDC, & vis per AD resolvatur in vires per latera AB, AC; vis per AL supponi poterit composita ex viribus per AB, AC, AH, AK. Atque ita semper procedendo, licebit progredi in infinitum.

Quoniam autem rectæ lineæ AK, IL sunt æquales, & parallelæ; fit hinc, ut vis per diagonalem AL supponi possit composita, tum ex viribus per latera AK, AI, cum ex viribus per latera AI, IL. Et similiter propter parallelas, & æquales AD, HI vis per AI considerari potest composita non modò ex viribus per rectas AH, AD, verùm

etiam ex viribus pr rectas AH, HI. Ex quibus demum illud elucescit, quod si super datâ rectâ lineâ, tamquam latere uno, figura quævis rectilinea describatur; vis per rectam illam lineam supponi possit composita ex viribus per reliqua figuræ latera, atque adeò in easdem illas tamquam in suas partes resolvi.

Sed examinemus modò effectus, qui oriuntur ex contrarietate, aut conspiratione virium componentium. Quem in finem, sciendum est priùs, vires conspirantes esse illas, quæ versus eandem plagam diriguntur; vires verò contrarias, quæ tendunt ad plagas contrarias, & inter se oppositas ex diametro. Unde quum ostensum sit, vires per latera alicujus parallelogrammi componere simul vim per diagonalem; illud primò in hac re statui potest, vim compositam eò esse majorem, quò conspirant magis vires componentes; & vicissim eò minorem, quò eædem vires componentes magis ad contrarietatem accedunt.

Urgeatur etenim corpus simul, & eodem tempore duabus viribus, quarum directiones, & quantitates designentur per latera parallelogrammi AK, AI; ita, ut viribus iis conjunctis describat corpus diagonalem AL, eodem tempore, quo viribus separatis describeret ipsa latera AK, AI. Et quoniam an-

angulus parallelogrammi KAI eò quidem eſt minor, quò vires componentes AK, AI ſunt magis conſpirantes, & viciſſim eò major, quo eædem vires magis ad contrarietatem accedunt; erit diagonalis ipſa parallelogrammi AL eò longior, quò conſpirant magis vires componentes, & viciſſim eo brevior, quò eædem vires magis opponuntur inter ſe mutuò. Unde, quia diagonalis AL deſignat vim compoſitam; conſequens eſt, ut vis compoſita eò quidem ſit major, quò vires componentes ſunt magis conſpirantes, & viciſſim eò minor, quò magis ad contrarietatem accedunt.

Statui ſecundò poteſt, quod quantumvis conſpirantes ſupponantur vires componentes AK, AI, modò earum directiones angulum conſtituant KAI, nunquam vis compoſita poſſit eas ſimul ſumptas adæquare, ſed ſummâ ipſarum minor ſemper eſſe debeat; nam deſignatur vis compoſita per diagonalem AL, quæ minor eſt ſummâ laterum AK, AI, quæ vires referunt componentes. Verumtamen ſi angulus KAI, contentus ſub directionibus virium componentium minuatur in infinitum, ita ut tandem evaneſcat, & conſpirent in totum virium directiones; tunc vis compoſita adæquabit vires componentes ſimul ſumptas, quia in iſto caſu diagonalis AL, evadit ſumma la-

te-

terum AK, AI.

Et denique statui potest, quod quantumvis contrariæ supponantur vires componentes AK, AI, modò earum directiones angulum constituant KAI, nec jaceant in directum, numquam vis composita possit earum differentiam adæquare, sed semper differentiâ illa major esse debeat; quandoquidem diagonalis AL, quæ designat vim compositam, major est differentiâ laterum AK, AI, quæ designant vires componentes. Quod si autem angulus KAI contentus sub directionibus virium componentium augeatur in infinitum, ita ut fiat tandem duobus rectis æqualis, & opponantur ex diametro virium directiones; tunc vis composita adæquabit differentiam virium componentium, quum in isto casu diagonalis AL evadat differentia laterum AK, AI.

Quæ de viribus dicta sunt, possunt etiam applicari motibus, qui sunt virium effectus, aut etiam velocitatibus, quibus motus proportione corrspondent, quum data est quantitas materiæ corporis mobilis. Nam quemadmodum vires per latera AK, AI componunt vim per diagonalem AL, quæ eò est major, quò conspirant magis vires componentes, eòque minor, quò eædem vires magis ad contrarietatem accedunt; sic ex motibus per latera AK, AI componetur mo-

motus per diagonalem AL, qui eò major erit, quò sunt magis conspirantes motus componentes, eòque minor, quò iidem motus magis contrarii sunt.

Unde porrò, quemadmodum quum directiones virium componentium angulum constituunt, vis composita est minor summâ, major differentiâ illarum virium; ita quoque quum directiones motuum componentium angulum comprehendunt, erit motus compositus minor summâ, major differentiâ eorum motuum. Et ulteriùs, sicuti vis composita adæquat summam virium componentium, quum sunt omnino conspirantes, & differentiam earumdem virium, quum sunt prorsus contrariæ; ita motus compositus adæquabit summam motuum componentium, quum eadem est utriusque directio, & differentiam eorundem motuum, **quum eorum directiones opponuntur ex diametro.**

Ex hac motuum compositione illud colligit Newtonus, nõ eandem semper esse in hoc mundo motus quantitatem, quum ex variis binorum motuum compositionibus possit modò major, modò minor motus oriri. Sic iidem motus, qui secundùm datas directiones datum motum componunt, component motum majorem, si fiant magis conspirantes, & vicissim motum minorem, si magis

ad

ad contrarietatem accedant. Atque ita quoque si duo globi tenui virgulâ conjuncti uniformi cum motu circa commune ipsorum gravitatis centrum revolvantur, interea ac centrum ipsum uniformi etiam cum motu feratur in lineâ rectâ, ductâ in plano motus ipsorum circularis; summa motuum illorum globorum, quoties erunt in lineâ rectâ à communi ipsorum gravitatis centro descriptâ, major utique erit, quàm summa motuum eorundem, quum erunt in lineâ, quæ sit ad lineam illam rectam perpendicularis.

Verùm etsi hæc omnia vera sint, non hinc tamen colligi potest, quod quantitas motus in hoc mundo eadem semper non perseveret. Quod enim efficit, ut corpus describat diagonalem AL, sunt motus laterales AK, AI: proindeque quantitas motus, quæ tunc temporis in mundo reperitur, non quidem per diagonalem, sive motum compositum AL, sed per summam laterum, sive motuum componentium AK, AI debet definiri. Unde etsi motus compositus pro variâ directione motuum componentium modò major, modò minor oriatur; eadem tamen semper erit in mundo quantitas motus, quia summa motuum componentium, per quam ea definitur, eadem semper perseverat.

Id clariùs apparebit, si quemadmodum su-

ſuperiùs factum eſt, unum ex motibus componentibus corpori, alterum rectæ lineæ, ſuper qua corpus fertur, tribuamus. Si enim ſupponamus, rectam AK moveri ſuper AI motu æquabili, ac parallelo, interea ac corpus ſuper ipſâ AK fertur etiam æquabiliter; quantitas motus, quæ in hoc ſyſtemate exiſtet in mundo, definietur per ſummam laterum AK, AI, cujuſcumque magnitudinis ſit angulus KAI ſub iis lateribus contentus. Jam corpus utroque motu deſcribit diagonalem AL, quæ pro variâ quantitate illius anguli non ſemper eſt ejuſdem longitudinis. Itaque major, aut minor motus, qui ex binorum compoſitione oritur, nequaquam efficiet, ut eadem in mundo quantitas motus non perſeveret.

Eâdem igitur ratione, etſi veriſſimum ſit, duos illos globos, tenui virgulâ conjunctos, majorem ſummam motuum habere, quum ſunt in lineâ rectâ, à communi ipſorum gravitatis centro deſcriptâ, quàm quum ſunt in lineâ ad iſtam perpendiculari; non hinc tamen inferri debet, quod non ſit ſemper eadem in mundo quantitas motus: enim verò in eo ſyſtemate motus quantitas, quæ in mundo reperitur, definiri debet, non jam per ſummam motuum in globis exiſtentium, ſed per ſummam ex motu, quo ipſi globi revolvuntur circa commune centrum gravita-

tis,

tis, velut immobile oonsideratum, & motu, quo commune fertur gravitatis centrum.

Illud potiùs argumentum videtur suadere, non eandem semper in mundo motus quantitatem perseverare, quod eruitur ex corporum inertium collisione, nempe quod si duo corpora, adeò perfectè dura, vel etiam adeò planè mollia, ut vim nullam elasticam habeant, sibi mutuò obviam eant, post occursum non eadem perseveret quantitas motus, quæ erat ante occursum, sed destructis motibus contrariis, tantùm maneat differentia eorum motuum. Neque enim huic difficultati fieri potest satis, dicendo motus contrarios non quidem se mutuò destruere, sed circumjacentibus aliis corporibus communicari; nam quum hujus communicationis non alia sit causa, quàm corporum occursus, necesse foret, ut tantundem quoque motus deberet communicari corporibus aliis circumjacentibus, quum corpora versus eandem plagam feruntur: quod tamen falsum est, quum experientia constet corpora, quæ moventur ad eandem partem, tantundem motus post occursum habere, quantum ante occursum habebant.

Interim si consideremus naturam illius materiæ, in qua motus, qui supponitur impressus à Deo, conservatur, & à qua corpora omnia sensibilia moventur, huic quoque dif-

difficultati poterit occurri. Quum enim in hoc Philoſophiæ ſyſtemate plena ſint omnia, nec ullum detur ſpatium inane, ſi ſupponamus universam materiam, hoc magno noſtro vortice contentam, & in minutiſſimas particulas diviſam, certâ motus quantitate Dei manibus fuiſſe agitatam; exiliſſimæ ejus particulæ non potuerunt rectà progredi, atque ita opus fuit, ut non modò omnes circa centrum totius vorticis, verùm etiam ut plures circa unum, idemque punctum circulariter moverentur: unde ex universâ illâ materiâ quamplures exigui vortices formati fuerunt, qui quum ex minutiſſimis particulis celeriter agitatis componantur, facilè intelligemus in unoquoque eorum reperiri conatum quendam centrifugum, per quem minutiſſimæ illæ particulæ à centro motus continuò tendant recedere.

Quum igitur materia, quæ motum à Deo impreſſum conſervans, corpora omnia ſenſibilia movet, & agitat, ſint exigui quidam vortices, conatu quodam centrifugo præditi; haud difficile modò erit, rationem reddere, cur fiat, ut quum corpora inertia ſibi mutuò obviam eunt, maneat poſt occurſum, non ſumma, ſed differentia motuum, nec tamen pereant motus contrarii. Notum eſt enim, corpora perfectè elaſtica, & ejuſdem ponderis, quum ſibi mutuò æquali-

bus

bus velocitatibus obviam eunt, resilire à se invicem, nullâ velocitatis parte amissâ. Itaque quum exigui illi vortices, velut conatu quodam centrifugo referti, considerari possint tamquam corpuscula elastica; iidem, quum sibi invicem occurrunt, resilient ad partes contrarias eâdem velocitate, qua ante occursum ferebantur.

Et quoniam corpora sensibilia moventur, quia ab exiguis istis vorticibus impelluntur; fit hinc, ut in occursu corporum sensibilium occurrant etiam sibi mutuò exigui vortices, corpora illa impellentes. Unde remanebit in ipsis corporibus post occursum dumtaxat motuum differentia; quandoquidem exigui vortices corpus unum impellentes impingunt in alios totidem eorum, qui corpus aliud impellunt: ex quò fit, ut tam illi, quàm isti resiliant ad partes contrarias; atque ita ipsa corpora pergent moveri, quia à reliquis tantùm vorticibus impelluntur. Sed hæc dicta sint in gratiam eorum, qui hoc philosophandi genere delectantur: nam ingenuè fateor, me animum non adeò docilem habere, ut possim iis libenter acquiescere; quum ea semper mihi placuit philosophandi ratio, quæ non fictis hypothesibus, sed certissimis experimentis innititur.

SE-

SECTIO II.

De Artificiosâ Gravium Latione.

Corpora gravia artificiosè ferri dicuntur, quotiescumque machinarum ope aliâ ratione moventur, quàm secundùm directionem gravitatis; veluti quum funibus, & orbiculis sursum attollūtur, vel etiam quum ducuntur per longitudinem plani horizontalis. De artificiosâ istâ gravium latione, ut ab initio monuimus, tractarunt Veteres sub nomine Mechanices: unde etsi tale nomen machinandi artem propriè significet, communiter tamen usurpatur ad designandam eam Statices partem, quæ gravia considerat, quatenus debent artificiosè moveri.

CAP. I.

De principio mechanices fundamentali, & de applicatione ejus ad machinas simpliciores.

Quum grave aliquod corpus fertur artificiosè, quemadmodum instrumentum lationis machinam, ita id, quod est causa motus, potentiam Mechanici vocant

Sed quod in hac latione potentiæ opponitur, & reluctatur, non est semper corporis pondus. Nam, quum corpus scinditur per cuneum, aut per cochleam comprimitur, non aliunde oritur resistentia, quàm à cohæsione partium corporis; & similiter quum corpora in solo ducuntur, à solâ inertiâ materiæ oritur in ipsis corporibus resistentia, sive reactio.

Hinc in definiendis motibus gravium artificiosis, id quod potentiæ opponitur, & reluctatur, modò pondus, modò resistentiam dicemus; pondus, inquam, quum renixus oritur à gravitate; resistentiam verò, quum aliunde, quàm à gravitate, proficiscitur. Et quamquam cum pondere conjuncta sit semper inertia materiæ, attamen quum collisio fit inter potentiam, & pondus, illius inertiæ nullam rationem habebimus, sed considerabimus corpus veluti reductum ad punctum illud, in quo tota vis suæ gravitatis colligitur, & coacervatur.

Quum ablatâ ex corpore resistentiâ, possit illud moveri per omnem quantumvis minimam vim; fit hinc, ut ad determinandam potentiam, per quam grave corpus artificiosè moveri queat, definiendus sit primò casus æquilibrii inter potentiam, & pondus, sive resistentiam. Nam semper ac potentia æquilibratur cum eo, quod in latio-

tione corporis gravis ipsi opponitur, & reluctatur; jam ex corpore sublatum erit id omne, quod impedit motum ejus optatum: adeoque si tantillum augeatur potentia, corporis motus protinus obtinebitur.

Potentia, & resistentia æquilibrantur inter se mutuò, quum æqualia habent momenta, sive motus quantitates; nam ratione æqualium momentorum, quantum potentia agit in resistentiam, tantundem resistentia potentiæ reluctabitur. Unde quia ex superiùs extensis nequeunt potentia, & resistentia habere æqualia momenta, nisi fuerint in reciprocâ ratione suarum velocitatum; æquilibrabitur potentia cum resistentiâ, siquidem ratione machinæ in tali sint ad motum dispositione, ut resistentia sit ad potentiam, quemadmodum est velocitas, qua ageret potentia, ad velocitatem, qua reluctaretur resistentia.

Et quoniam velocitates duorum mobilium sunt, ut spatia, quæ eodem tempore describunt; æquilibrabitur quoque potentia cum resistentiâ, si talem iis machina ad motum tribuat dispositionem, ut resistentia sit ad potentiam, quemadmodum est spatium, quod describeret potentia, ad spatium, quod interea temporis percurreret resistentia. Unde ad determinandam potentiam, quæ cum datâ resistentiâ æquilibretur,

tur, non aliud fieri debet, quàm definire relationem velocitatum, aut etiam spatiorum, quæ eodem tempore ab iis describerentur; quandoquidem potentia, quæ est ad resistentiam in reciprocâ illâ ratione, cum ipsâ resistentiâ æquilibrata manebit.

Atque hoc quidem est principium fundamentale mechanices, quod ad omnes omnino machinas extenditur; nec vereor dicere, impossibile prorsus esse, ut aliud reperiatur, quod universalitate, ac simplicitate suâ possit cum isto contendere. Reliquum jam est, ut illud ad machinas saltem simpliciores applicemus, nimirum ad libram, vectem, polyspastum, axem in peritrochio, cochleam, & cuneum: qua in re ordiemur à librâ, utpote quæ, communi omnium voto, inter mechanica instrumenta primum sibi vindicat locum.

Est igitur libra recta quædam linea puncto aliquo medio, vel liberè suspensa, vel etiam fulcimento suffulta, ex cujus extremitatibus pendent pondera duo. Ita si recta linea AB puncto sui medio C, vel liberè suspendatur, vel etiam innitatur fulcimento aliquo, & ex extremitatibus ejus A, & B pendeant pondera duo M, & N; linea ista his ponderibus instructa libra dicetur. Et quoniam, quæ in se mutuò agunt, sunt ipsa pondera M, & N; subibit alterum ipso-

FIG. 10.

sorum vices potentiæ, alterum vices resistentiæ.

Jam servabitur inter hæc duo pondera æquilibrium, si ratione libræ fuerint in tali ad motum dispositione, ut pondus M sit ad pondus N, velut est velocitas, qua movetetur pondus N, ad velocitatem, qua moveretur pondus M. Unde quia in libræ revolutione velocitates ponderum N, & M eædem sunt, quæ punctorum B, & A, ex quibus suspenduntur; & velocitates istorum punctorum definiuntur per distantias eorundem à centro libræ, hoc est per rectas BC, AC; servabitur æquilibrium inter pondera M, & N, si fuerit ut pondus M ad pondus N, ita BC ad AC; hoc est, si fuerint ipsa pondera in reciprocâ ratione suarum à centro libræ distantiarum.

Quod autem in libræ revolutione distantiæ BC, AC proportione correspondeant velocitatibus punctorum B, & A; id equidem dependet ex motu circulari. Nam generaliter si recta quædam linea inflexilis, velut AB, circulariter moveatur circa aliquod ejus punctum C; velocitates punctorum A, B, D erunt, ut distantiæ eorundem à centro motus AC, BC, DC. Sunt quippe velocitates eorum punctorum, ut arcus AE, BF, DG eodem tempore descripti; qui quidem arcus, propter similitudinem sectorum CAE, FIG. 11.

CBF, CDG, ſunt ut radii AC,BC, DC.

Secundò vectis eſt oblongus ille palus, qui ad ingentia corpora movenda paſſim adhibetur, quemque conſiderant vulgò Mechanici velut lineam inflexilem, omniſque gravitatis expertem. In eo tria ſunt diſtinguenda; ſcilicet pondus, quod ſurſum debet attolli; potentia, per quam pondus elevatur; & fulcimentum, cui vectis innititur, id quod græcè hypomochlion dicitur. Et quoniam hæc tria tripliciter in ipſo vecte diſponi poſſunt; tria hinc etiam vectium genera diſtinguuntur.

FIG. 12. Vocatur etenim vectis primi generis, qui habet pondus in uno extremo, potentiam in altero, & hypomochlion in puncto aliquo intermedio. Qui verò habet pondus in

FIG. 13. medio, potentiam in uno extremo, & hypomochlion in altero, vocatur vectis ſecundi generis. Et denique qui potentiam habet

FIG. 14. in medio, hypomochlion in uno extremo, & pondus in extremo altero, vectis tertii generis appellatur.

Cujuſcumque generis ſit vectis, fiet æquilibrium inter potentiam, & pondus, ſi potentia fuerit ad pondus, ut diſtantia ponderis ab hypomochlio ad diſtantiam potentiæ. In vecte etenim AB ſit pondus in A, potentia in B, & hypomochlion, ſive fulcimentum in C. Itaque ob principium fun-

fundamentale mechanices æquilibrabitur potentia cum pondere, si ratione vectis fuerint in tali ad motum dispositione, ut potentia sit ad pondus, quemadmodum est velocitas ponderis ad velocitatem potentiæ.

Et quoniam pondus est applicatum in A, potentia autem in B; habebunt in motu vectis pondus, & potentia easdem velocitates, ac puncta A, & B. Unde, quia motus vectis fit circa punctum immobile C, adeoque velocitates punctorum A, & B sunt, ut distantiæ AC, BC; erit velocitas ponderis ad velocitatem potentiæ similiter, ut AC ad BC. Et igitur æquilibrabitur in vecte potentia cum pondere, si fuerit, ut potentia ad pondus, ita distantia ponderis ab hypomochlio ad distantiam potentiæ.

Hinc, quia in vecte primi generis distantia ponderis ad distantiam potentiæ potest habere rationem, tum minoris ad majus, tum majoris ad minus, tum denique æqualitatis; perspicuum est, in eodem vecte potentiam esse posse tum minorem, tum majorem, tum æqualem ponderi, quod sustinet. Verùm in vecte secundi generis potentia semper minor est pondere, quia distantia ponderis ad distantiam potentiæ habet semper rationem minoris ad majus. Et denique in vecte tertii generis potentia pondere semper est major, quia distantia ponderis

deris ad distantiam potentiæ habet semper rationem majoris ad minus.

FIG. 15. 16. Tertiò axis in peritrochio est oblongus quidam cylindrus horizonti parallelus, vel perpendicularis, cujus extremitates in rotundis foraminibus immoti pegmatis expeditè vertuntur. Habet prope unam ejus extremitatem circumpositam rotam, sive tympanum, in cujus convexâ peripheria stipites teretes, foraminibus ad id factis, sunt affixi. Et quemadmodum vocatur axis, ipse quidem cylindrus horizonti parallelus, vel perpendicularis; ita dicitur peritrochium, rota, sive tympanum, quod habet circumpositum; & radii, sivæ scytalæ, baculi illi teretes, qui in convexâ rotæ peripheriâ sunt affixi.

Hujus instrumenti usus in ponderibus, vel sursum elevandis, vel horizontaliter trahendis ut plurimum consistit. Nam si funes ad pondus alligati circa depressas axis partes circumponantur, & peritrochii scytalis potentia applicetur, quæ peritrochium vertat unà cum axe; jam funes circa axem convoluti, vel ab aliquo recollecti, ne toti axi circumponantur, pro variâ ipsius axis ad horizontem positione, pondus ipsum vel sursum elevabunt, vel horizontaliter trahent.

In hoc instrumento æquilibrabitur poten-

tia

tia cum pondere, si fuerit ut potentia ad pondus, ita perimeter axis ad perimetrum orbis extimi. Nam in unâ ejus conversione pondus tantundem trahitur, quantum funis circa axem complicatur, hoc est, quanta est perimeter ipsius axis; & potentia tantundem promovetur, quanta est perimeter ejus orbis, quem scytala describit. Quocirca in unâ machinæ revolutione spatium descriptum à pondere erit ad spatium descriptum à potentiâ, ut est perimeter axis ad perimetrum orbis extimi; & ideo, quum velocitates sint, ut spatia eodem tempore descripta, erit quoque ut velocitas ponderis ad velocitatem potentiæ, ita perimeter axis ad perimetrum orbis extimi.

Hinc quotiescumque in axe in peritrochio potentia eam habet rationem ad pondus, quam habet perimeter axis ad perimetrum orbis extimi; jam potentia, & pondus erunt in tali ad motum dispositione, ut si utique machina revolveretur, potentia foret ad pondus, ut est velocitas ponderis ad velocitatem potentiæ. Unde, quia ex principio mechanices fundamentali æquilibratur potentia cum pondere, quotiescumque sunt in reciprocâ suarum velocitatum ratione: consequens est, in axe in peritrochio adesse æquilibrium inter potentiam, & pondus, quum fuerit, ut potentia ad pondus, ita peri-

perimeter axis ad perimetrum orbis extimi.

Hæc machina construi quoque solet nullo adhibito peritrochio, applicando nempe scytalas ad foramina facta in perimetro ipsius axis: quo casu eadem adhuc requiritur proportio inter potentiam, & pondus, ut maneant in æquilibrio: nempe, quod potentia debeat esse ad pondus, ut est perimeter axis ad perimetrum orbis, quem potentia uni ex scytalis applicata describit. Sed interim hæc machina, sine peritrochio elaborata, nequit amplius dici axis in peritrochio. Quocirca dicta est sucula, quum axis perpendicularis est ad horizontem; ergata verò, quum idem axis est horizonti parallelus.

Fig. 17. 18. Quartò polyspastum, sive trochleam vocant Mechanici machinam quandam ex uno, aut pluribus orbiculis circa axes suos volubilibus compositam, quibus circumpositus funis ductorius pondus per potentiam trahit. Orbiculi isti ita disponi possunt, ut pondus nunc ab uno fune, nunc à duobus, aut pluribus sustineatur. Unde hujusmodi machinam vocant specialiter Mechanici monospastum, quum pondus sustinetur ab uno fune; bispastum, quum à duobus; trispastum, quum à tribus; atque ita deinceps.

In omni polyspasto, si fuerit, ut potentia ad pondus, ita unitas ad numerum funiculo-

lorum, quibus pondus ſuſtinetur, æquilibrabitur potentia cum pondere, illudque ſuſtinebit. Nam ſi ponamus pondus à potentiâ ſurſum per unum pedem attolli, quia unuſquiſque funiculus pondus ſuſtinens debet uno pede brevior reddi, percurret potentia pedes totidem, quot ſunt ipſi funiculi pondus ſuſtinentes. Unde velocitas ponderis ad velocitatem potentiæ erit, ut unitas ad numerum funiculorum; quum in hac ratione ſint ſpatia, quæ eodem tempore ab iis percurruntur.

Hinc quotieſcumque potentia eam habet rationem ad pondus, quæ eſt inter unitatem, & numerum funiculorum pondus ſuſtinentium; jam potentia, & pondus ratione machinæ erunt in tali ad motum diſpoſitione, ut ſi utique machina moveretur, foret ut potentia ad pondus, ita velocitas ponderis ad velocitatem potentiæ. Ex principio autem mechanices fundamentali æquilibratur potentia cum pondere, quum reciprocam ſervant ſuarum velocitatum rationem. Et igitur in omni polyſpaſto, ſi fuerit, ut potentia ad pondus, ita unitas ad numerum funiculorum pondus ſuſtinentium, æquilibrabitur potentia cum pondere, illudque ſuſtinebit.

Quintò cochleam vocant Mechanici rectum cylindrum helice ſimiliter ſulcatum; cu-

cujus duas ſpecies diſtinguunt ; unam nempe interiorem , ſive maſculeam , in qua ſulcata ſuperficies eſt convexa ; alteram exteriorem, ſive femineam, cujus ſuperficies ſulcata eſt concava. Ex utrâque ſimul conjunctâ hujuſmodi componunt inſtrumentum; nempe ut AB ſit cochlea maſculea , quæ per potentiam applicatam manubrio AC labatur tota ſive ſurſum , ſive deorſum per duas alias cochleas femineas immotas , ipſi quidem adeò conformiter ſulcatas , ut ejus eminentiæ cavitatibus iſtarum correſpondeat adamuſſim .

FIG. 19.

Hoc inſtrumentum tametſi ponderibus elevandis poſſit applicari , nimirum quum cochlea interior , ſive maſculea AB ſurſum per potentiam manubrio AC applicatam attollitur ; potiſſimùm tamen adhiberi ſolet ad corpora frangenda , aut comprimenda , alioſque motus truſione faciendos ; & propterea juxta ea , quæ initio hujus capitis monuimus , in hac machinâ potentiam non quidem cum pondere , ſed cum reſiſtentiâ comparabimus .

Æquipollebit autem in hac machinâ potentia reſiſtentiæ, ſi fuerit ut potentia ad reſiſtentiam , ita intervallum duarum proximè ſpiralium ad ambitum potentiæ. Per potentiam enim applicatam manubrio AC labatur cochlea interior AB per alias duas exte-

teriores immotas; jamque interea ac potentia revolutione unâ describit ambitum totum CD, cochlea ipsa, & consequenter resistentia superanda tantundem spatii describet, quantum est intervallum duarum proximè spiralium: proindeque velocitas resistentiæ erit ad velocitatem potentiæ, ut intervallum duarum proximè spiralium ad ambitum potentiæ.

Quocirca quotiescumque potentia eam habet rationem ad resistentiam, quam habet intervallum inter duas proximè spiras ad ambitum potentiæ; jam potentia, & resistentia ratione machinæ erunt in tali ad motum dispositione, ut potentia sit ad resistentiam, quemadmodum est velocitas resistentiæ ad velocitatem potentiæ. Ex principio autem mechanices fundamentali æquilibratur potentia cum resistentiâ, quum reciprocam servant inter se suarum velocitatum rationem. Igitur æquipollebit potentia resistentiæ, si fuerit, ut potentia ad resistiam, ita intervallnm duarum proximè spiralium ad ambitum potentiæ.

Et denique cuneus est simplex quoddam instrumentum, ad findenda, sive scindenda corpora aptum, mediante percussione. Construitur enim ex ferro, aut aliâ quavis durâ materiâ ad formam prismatis non admodum alti, cujus opposita latera sunt duo trian-

triangula iſoſcelia, & æqualia. Vocatur autem cunei acies recta illa linea, quæ iſoſcelium triangulorum vertices conjungit; cunei altitudo recta linea, quæ cujuſque trianguli altitudinem metitur; craſſities, baſis cujuſcumque trianguli; ac denique dorſum, parallelogremmum, quod baſes conjungit ipſorum triangulorum. Adhibetur porrò ad ſcindenda corpora, quotieſcumque cunei acie in rimulam aliquam ſcindendi corporis immiſsâ, & adveniente validâ percuſſione, quæ per malleum, ſuper cunei dorſum adactum, fieri ſolet, totus cuneus in rimulam immittitur.

In hoc inſtrumento, quod potentiæ opponitur, & reluctatur, eſt reſiſtentia, quæ oritur ex cohærentiâ fibrarum ſcindendi corporis. Æquipollebit autem in eo potentia reſiſtentiæ, ſi fuerit, ut potentia ad reſiſtentiam, ita cunei craſſities ad ejuſdem altitudinem. Supponamus enim, cuneum
FIG. 20. ABC, per potentiam directè dorſo applicatam, eò uſque adactum eſſe, donec obtineat ſitum, quem ſchema repræſentat: ſcilicet, ut BG ſit ſpatium percurſum à cuneo, & conſequenter à potentiâ ſecundùm ſuam directionem, EF verò ſpatium, quod percurrunt ſcindendi corporis fibræ, quum à ſe mutuò ſeparantur; jamque erit, ut velocitas reſiſtentiæ ad velocitatem potentiæ, ita EF ad BG.

Et

Et quoniam EF eſt ad BG, ut craſſities cunei AC ad ejuſdem altitudinem BD; erit ex æquali, ut velocitas reſiſtentiæ ad velocitatem potentiæ, ita cunei craſſities ad ipſius altitudinem: proindeque quum in cuneo potentia, & reſiſtentia eam habent rationem inter ſe, quæ eſt inter cunei craſſitiem, & altitudinem; jam ratione cunei in tali erunt ad motum diſpoſitione, ut reciprocam ſervent ſuarum velocitatum rationem. Sed ex principio mechanices fundamentali ſervatur æquilibrium inter potentiam, & reſiſtentiam, quum potentia eſt ad reſiſtentiam, ut velocitas reſiſtentiæ ad velocitatem potentiæ. Et igitur in cuneo potentia æquipollebit reſiſtentiæ, ſi potentia fuerit ad reſiſtentiam, ut eſt craſſities cunei ad ejuſdem altitudinem.

Nihil hìc addimus de ponderibus, quæ per longitudines planorum inclinatorum ſurſum trahuntur, quia de iis commodior erit agendi locus, ubi de motu gravium naturali ſermo recurret. Tantùm hoc loco monendum exiſtimamus, quod ſiquidem ex eodem fundamentali mechanices principio plani inclinati proprietas eſſet deducenda, ad definiendam velocitatem corporis gravis, habenda foret ratio ſpatii, quod non obliquè, ſed verticaliter grave corpus deſcribit. Comparatur enim cum potentiâ pondus corporis

poris absolutum, cujus equidem effectus est, ut grave rectà accedat ad horizontem.

Vulgares Mechanici omnes alias machinas ad vectem revocare conantur, & ex cognitâ vectis proprietate earum omnium colligunt affectiones; sed & ipsum vectem ad libram reducunt: imitati Aristotelem, qui in suâ mechanicâ, quæ circa libram fiunt, ad circulum; quæ circa vectem, ad libram; quæ autem circa omnes alias machinas, ad vectem revocavit. Ex quo factum, ut non aliam mechanices ponant propositionem fundamentalem, quam eandem illam, quæ in librâ statuit ponderum æquilibrium.

Hanc propositionem, quæ totius mechanicæ disciplinæ fundamentum ipsis evadit, ostendunt communiter demonstratione Archimedeâ, prout eam restituit, & vindicavit Galilæus. Innititur hæc demonstratio proprietati centri gravitatis: nempe quod si corpus aliquod ex proprio suæ gravitatis centro suspendatur, illud moveri non possit. Est autem elegans sanè, & ingeniosa demonstratio, quam ne aliunde petant Tyrones nostri, illam hìc afferre non gravabimur.

FIG. 21. Sit itaque AB prisma, sive cylindrus ejusdem ubique densitatis, idemque planis parallelis secetur bifariam in C, & non bifariam in D; sitq; AD pars major, & DB pars mi-

minor. Harum partium puncta media, sive centra gravitatis sint E, & F, ex quibus erigantur duæ restes æquales EG, FH, quæ ipsi AB perpendiculares, alligentur extremitatibus libræ GH. Ex C porrò, centro gravitatis totius prismatis erigatur perpendicularis altera CI, quæ libræ occurrat in I; & constituatur I centrum ipsius libræ.

Jam si partes prismatis AD, DB simul essent unitæ, quia in restibus, & librâ nullam gravitatem consideramus, facilè intelligemus manere prisma æquilibratum, quotiescumque libra suspenditur ex puncto I; quandoquidem perinde se res habebit, ac si prisma suspenderetur ex puncto C, quod est centrum suæ gravitatis. Sed factâ partium scissione, nullus in iis motus contingere potest, quum suspendantur per restes ex punctis E, & F, quæ sunt centra gravitatis earum partium. Itaque partes prismatis AD, DB manebunt æquilibratæ, quotiescumque libra suspenditur ex puncto I.

Et quoniam prisma est ejusdem ubique densitatis, pondera partium AD, DB erunt inter se, ut magnitudines earundem. Sed ex Geometriæ Elementis magnitudines partium AD, DB sunt, ut longitudines ipsarum, quarum semisses sunt rectæ DE, DF. Quare erit ex æquali, ut pondus partis AD

ad pondus partis DB, ita recta DE ad rectam DF: & propterea, quum rectæ DE, DF æquales sint ipsis IH, IG; erit rursus, ut pondus partis AD ad pondus partis DB, ita IH ad IG.

Sunt igitur pondera AD, DB, in æquilibrio constituta, in reciprocâ ratione suarum à centro libræ distantiarum. Et quoniam pondera corporum, mutatis figuris, nullam patiuntnr mutationem, sed eadem semper perseverant; proinde si concipiamus prismatis partes AD, DB in corpora sphærica, cubica, aut alterius cujusvis figuræ mutari, adhuc etiam manebunt in æquilibrio. Et igitur generaliter si ex libræ extremitatibus pendeant pondera duo, ea non poterunt esse in æquilibrio, nisi reciprocam servent rationem suarum à centro libræ distantiarum.

CAP. II.

De communi centro gravitatis quotcumque corporum, & de præcipuis ejus affectionibus.

Quemadmodum in unoquoque corpore vocamus centrum gravitatis punctum illud corporis internum, circa quod omnes ejus partes subinde librantur, ut si exinde suspendatur, eundem semper suarum par-

partium situm retinebit; ita duorum quorumvis corporum, in eodem plano horizontali jacentium, dicemus commune gravitatis centrum punctum illud, subinde situm in rectâ lineâ, ipsorum propria centra conjungente, ut distantiæ corporum ab illo puncto sint in reciprocâ ratione suorum ponderum.

Hac ratione, si A, & B sint duo quælibet corpora, existentia in eodem plano horizontali, quorum centra gravitatis conjungat recta AB, & dividatur recta ista AB subinde in puncto C, ut distantia AC sit ad distantiam BC, veluti est pondus corporis B ad pondus corporis A; vocabimus punctum C commune centrum gravitatis duorum corporum A, & B: enim verò si ambo suspendantur ex puncto isto, manebunt inter se mutuò æquilibrata, nec unum ab altero poterit attolli. FIG. 22.

Jam si duobus iis corporibus A, & B accedat tertium D, & commune centrum gravitatis illorum conjungatur cum proprio centro istius per rectam CD; punctum E, subinde situm in rectâ istâ, ut distantia CE sit ad distantiam DE, veluti est pondus corporis D ad pondera corporum A, & B, dicetur commune centrum gravitatis eorum omnium; quum suspensis similiter iis ex puncto illo, maneant omnia inter se mu-

tuò æquilibrata, nec ullum per aliorum actionem possit attolli.

Eâdem autem ratione, si tribus iis corporibus quartum superveniat F, cujus proprium centrum gravitatis conjungatur cum communi centro illorum per rectam EF; punctum G, quod ita dividit rectam istam, ut distantia EG sit ad distantiam FG, quemadmodum est pondus corporis F ad pondera corporum A, B, D, dicetur commune centrum gravitatis corporum omnium; eodemque artificio poterit quotcumque corporum commune gravitatis centrum definiri.

Et quidem corpora duo A, & B manere in æquilibrio, quotiescumque suspenduntur ex puncto C; nemo in dubium revocabit, postquam ostensum est, æquilibrari inter se mutuò pondera illa, quæ subinde pendent ex libræ extremitatibus, ut reciprocam servent rationem suarum à centro libræ distantiarum. Sed quod idem servetur æquilibrium, quum corpora tria A, B, D suspenduntur ex puncto E, vel etiam quum corpora quatuor A, B, D, F suspenduntur ex puncto G; id equidem non ita facilè ab omnibus concedetur.

Ut enim in tribus primum corporibus A, B, D dubitandi rationem proponamus, etsi facilè sibi quisque in animum inducat,

fer-

servari æquilibrium, quotiescumque corpora duo A, & B agunt in tertium D, quum tantam exerant actionem in locis suis, quantam si existerent in communi centro C, in quo pondera ipsorum reciprocam servant rationem distantiarum à puncto suspensionis cum pondere corporis D; nihilominus, quod eadem corpora maneant æquilibrata, quum duo A, & B exempli gratiâ agunt in tertium B; hoc quidem est illud, quod aliquam patitur difficultatem.

Patet autem, huic difficultati facili negotio occurri posse, si quemadmodum recta DE ita secat in C rectam AB, ut AC sit ad BC, veluti est pondus corporis B ad pondus corporis A; & ut CE sit ad DE, veluti est pondus corporis D ad pondera corporum A, & B: sic pariter ostendi possit, quod recta BE subinde dividat in H rectam AD, ut AH sit ad DH, quemadmodum est pondus corporis D ad pondus corporis A; & ut HE sit ad BE, quemadmodum est pondus corporis B ad pondera corporum A, & D.

Hunc in finem ducamus rectas AI, CL, ipsis BH, AD æquidistantes, quæ cum rectis CD, BH productis, si opus, conveniant in punctis I, & L. Et quoniam AC est ad BC, ut pondus corporis B ad pondus corporis A; erit componendo, ut AB ad BC, hoc est ut AH ad CL, ita pondera corporum A, & B

ad pondus corporis A. Eſt autem ut CE ad DE, hoc eſt, ut CL ad DH, ita pondus corporis D ad pondera corporum A, & B. Quare erit ex æquo perturbando, ut AH ad DH, ita pondus corporis D ad pondus corporis A.

Et quoniam AH eſt ad DH, ut pondus corporis D ad pondus corporis A; erit componendo ut AD ad DH, hoc eſt ut AI ad HE, ita pondera corporum A, & D ad pondus ſolius corporis A. Eſt autem, ut BC ad AC, hoc eſt ut BE ad AI, ita pondus corporis A ad pondus corporis B. Igitur ex æquo rurſus perturbando BE erit ad HE, ut pondera corporum A, & D ad pondus corporis B.

Servatur ergo æquilibrium, etiam quum duo corpora A, & D agunt in tertium B; quia tantam illa exerunt actionem in locis ſuis, quantam ſi exiſterent in communi centro H, ubi pondera ipſorum reciprocam ſervant rationem diſtantiarum à puncto ſuſpenſionis cum pondere corporis B. Et quia eodem prorſus argumento oſtendetur, rectam AE ſubinde dividere in K rectam BD, ut BK ſit ad DK, veluti eſt pondus corporis D ad pondus corporis B; & ut KE ſit ad AE, veluti eſt pondus corporis A ad pondera corporum B, & D, ſervabitur etiam æquilibrium, quum corpora duo B, & D agunt in tertium A.

Non

Non dissimilis est ratio dubitandi in quatuor corporibus A, B, D, F. Etsi enim facile quisque concedat, servari æquilibrium, quotiescumque corpora tria A, B, D agunt in quartum F, quum tantam illa exerant actionem in locis suis, quantam si existerent in communi centro E, in quo pondera ipsorum cum pondere corporis F reciprocam servant rationem distantiarum à puncto suspensionis; attamen quod eadem corpora maneant æquilibrata, quum tria A, B, F, exempli gratiâ, agunt in quartum D; hoc quidem illud est, quod aliquid difficultatis involvit.

Verùm huic difficultati perspicuum est, facili quoque negotio occurri posse, si quemadmodum recta FG transit producta per punctum E, quod est commune centrum gravitatis corporum A, B, D; estque EG ad FG, ut pondus corporis F ad pondera corporum A, B, D: sic pariter ostendi possit, quod recta DG transeat producta per commune centrum gravitatis corporum A, B, F, quodque distantia ejus centri à puncto suspensionis G sit ad DG, ut est pondus corporis D ad pondera corporum A, B, F.

Hunc in finem jungamus rectam CF, cum qua conveniat DG in M. Et quoniam C est commune centrum gravitatis corporum A, & B; existet in recta CF centrum

commune corporum A, B, F. Unde transibit recta DG producta per commune centrum gravitatis corporum A, B, F, siquidem ostendi possit, rectam CF subinde dividi in puncto M, ut CM sit ad FM, veluti est pondus corporis F ad pondera corporum A, & B.

Id autem ostendemus in hunc modum. Ducatur per punctum E recta EN ipsi DM parallela, quæ conveniat cum rectâ CF in puncto N. Et quoniam pondus corporis D est ad pondera corporum A, & B, ut CE ad DE; erit componendo, ut CD ad DE, hoc est ut CM ad MN, ita pondera corporum A, B, D ad pondera corporum A, & B. Jam autem pondus corporis F est ad pondera corporum A, B, D, ut EG ad FG, hoc est ut MN ad FM. Quare erit ex æquo perturbando, ut pondus corporis F ad pondera corporum A, & B, ita CM ad FM.

Est itaque punctum M commune centrum gravitatis corporum A, B, F. Quod verò MG sit ad DG, ut est pondus corporis D ad pondera corporum A, B, F, ostendemus quidem hac ratione. Ducatur per punctum M recta MO ipsi EF parallela, quæ conveniat cum CD in puncto O. Et quoniam pondus corporis F est ad pondera corporum A, & B, ut CM ad FM; erit componendo, ut CF ad FM, hoc est, ut CE ad EO, ita

ita pondera corporum A, B, F ad pondera corporum A, & B. Est autem ut DE ad CE, ita pondera corporum A, & B ad pondus corporis D. Quare erit ex æquo perturbando, ut DE ad EO, hoc est ut DG ad MG, ita pondera corporum A, B, F ad pondus corporis D.

Hinc servatur æquilibrium, etiam quum tria corpora A, B, F agunt in quartum D, quandoquidem tantam illa exercent actionem in locis suis, quantam si existerent in communi centro M, in quo eorum pondera servant reciprocam rationem distantiarum à puncto suspensionis cum pondere corporis B. Et quia eodem prorsus ratiocinio ostendetur servari æquilibrium, tum quum corpora B, D, F agunt in quartum A, tum in omni alio casu, qui fingi possit ac imaginari; consequens est, ut quatuor corpora A, B, D, F maneant inter se mutuò æquilibrata, quum conjunctis propriis ipsorum centris cum puncto G, omnia exinde suspenduntur.

Eâdem autem ratione demonstrabitur, fieri æquilibrium, quum corpora fuerint multo plura, quàm quatuor; ut hinc concludi possit generaliter, quod commune centrum gravitatis quotcumque corporum per methodum superiùs traditam optimè definiatur. Illud hìc monendum existima-

mamus, quod si data corpora fuerint non in uno, eodemque plano, sed in diversis planis horizontalibus; reducenda sint priùs ad idem planum, demittendo ex propriis eorum centris perpendicula totidem ad planum illud, in quo commune velimus centrum gravitatis invenire, & considerando corpora velut existentia in locis illis, ubi eorum perpendicula prædictum planum offendunt.

Jam commune istud centrum gravitatis duorum, aut plurium corporum varias habet proprietates, inter quas tres quidem sunt præcipuæ. Prima est, quod si per centrum illud agatur planum aliquod, pondera corporum, ad unam plani partem existentium, in suas ab eo distantias ducta, tantum efficiant, quantum pondera corporum, ad aliam plani partem collocatorum, ducta similiter in suas ab illo distantias.

Altera proprietas est, quod si corpora omnia fuerint ad eandem alicujus dati plani partem, facta ex ponderibus eorum in suas ab eo distantias æqualia sint ei, quod efficitur, si pondus unumquodque multiplicetur per distantiam communis centri gravitatis ab eodem plano.

Et denique tertia proprietas est, quod si corpora nonnulla fuerint ad unam alicujus dati plani partem, & corpora reliqua ad

par-

partem alteram; differentia, quæ est inter facta ex ponderibus illorum in suas à plano distantias, & facta ex ponderibus istorum in suas similiter distantias ab illo plano, æqualis sit facto ex ponderibus corporum omnium in distantiam communis centri gravitatis ab eodem illo plano.

Verùm in omnibus hisce proprietatibus illud supponimus, ut unumquodque corpus reductum sit ad punctum illud, quod est centrum suæ gravitatis; idque ea ratione, ut distantia ejus à plano, de quo agitur, sit perpendiculum, quod ex centro suæ gravitatis ducitur ad planum. Unde nisi hanc velimus hypothesim assumere, pro distantiâ corporis à plano illo, non alia erit intelligenda, quàm quæ à centro suæ gravitatis desumitur.

Ostendamus itaque primùm omnes hasce proprietates, quum commune centrum gravitatis ad duo tantùm corpora refertur. Sint ergo A, & B corpora duo, quorum commune gravitatis centrum sit punctum G. FIG. 23. Transeat autem per centrum istud planum aliquod MN, ad quod ex propriis centris corporum A, & B demittantur perpendicula AM, BN. Dico id, quod fit, multiplicando pondus corporis A per AM, æquale esse ei, quod oritur, multiplicando pondus corporis B per BN.

Quoniam enim C eſt centrum gravitatis corporum A, & B; erit ut AC ad BC, ita pondus corporis B ad pondus corporis A. Sed propter triangula ſimilia ACM, BCN, AC eſt ad BC, ut AM ad BN. Igitur erit ex æquali, ut pondus corporis B ad pondus corporis A, ita AM ad BN; & propterea factum ex pondere corporis A in AM æquale erit ei, quod efficitur ex pondere corporis B in BN.

Sit ſecundò PQ planum alterum, reſpectu cujus exiſtant ad eandem partem corpora A, & B. Demittantur ad planum iſtud tum ex propriis centris corporum A, & B perpendicula AP, BQ, cum ex communi eorum centro C perpendiculum CR. Dico facta ex ponderibus corporum A, & B in ſua reſpectivè perpendicula AP, BQ æqualia eſſe ei, quod oritur, multiplicando corporis cujuſque pondus per perpendiculum CR.

Ducatur enim per punctum C planum MN, æquidiſtans ipſi PQ, cum quo conveniant perpendicula AP, BQ in punctis M, & N; jamque propter æquales MP, CR, NQ, erunt facta tria, unum ex A in MP, alterum ex B in BN, & tertium ex B in BQ, æqualia ei, quod fit, multiplicando A, & B per CR. Oſtenſum eſt autem, factum ex B in BN æquale eſſe facto ex A in AM. Igitur facta tria, unum ex A in AM, alterum ex A

in

in MP, & tertium ex B in BQ; sive etiam facta duo unum ex A in AP, alterum ex B in BQ, æqualia erunt ei, quod efficitur, multiplicando A, & B per CR.

Sit denique ST planum tertium, subinde positum, ut corpus unum existat ad unam plani partem, corpus alterum ad partem aliam. Demittantur ad planum istud similiter, tam ex propriis centris corporum A, & B perpendicula AS, BT, quàm ex communi eorum centro C perpendiculum CV. Dico, differentiam inter factum ex A in AS, & factum ex B in BT, æqualem esse ei, quod fit, multiplicando A, & B per CV.

Ducatur namque ad alteram corporum partem planum PQ æquidistans ipsi ST, cum quo conveniant perpendicula omnia in punctis P, Q, R; jamque si ex factis ex A in AP, & ex B in BQ subducantur facta ex A in SP, & ex B in TQ, remanebit differentia factorum ex A in AS, & ex B in BT. Sunt autem priora duo facta æqualia ei, quod fit ex A, & B in CR; facta verò duo posteriora æqualia ei, quod efficitur ex A, & B in VR; adeòque id, quod remanet subducendo ista ex iis, æquale est facto ex A, & B in CV. Itaque differentia factorum ex A in AS, & ex B in BT æqualis erit ei, quod fit, multiplicando A, & B per CV.

Sed ostendamus modò easdem proprietates,

tes, quum commune centrum gravitatis ad
FIG. 24. tria corpora refertur. Sint igitur A, B, D corpora tria, quorum commune gravitatis cenrrum ſit punctum E. Tranſeat autem per centrum iſtud planum aliquod MN, ad quod ex proprijs centris corporum A, B, D demittantur perpendicula AM, BN, DO. Dico pondera corporum A, & B, ad unam plani partem exiſtentium, ducta in ſua reſpectivè perpendicula AM, BN, tantum efficere, quantum pondus ſolius corporis D, ad alteram plani partem exiſtentis, ductum in perpendiculum ſuum DO.

Jungantur enim centra corporum A, & B per rectam AB, cum quo conveniat recta DE in G, ex quo demittatur ad planum perpendicularis CK. Et quoniam C eſt commune centrum gravitatis corporum A, & B; erunt facta duo, unum ex A in AM, alterum ex B in BN, æqualia ei, quod fit ex A, & B in CK. Jam verò, quum punctum E ſit commune centrum corporum omnium, pondus corporis D eſt ad pondera corporum A, & B, ut CE ad DE, hoc eſt ut CK ad DO; adeòque factum ex A, & B in CK æquale eſt ei, quod fit ex D in DO. Igitur facta duo, unum ex A in AM, alterum ex B in BN, æqualia erunt ſoli facto ex D in DO.

Poteſt etiam in demonſtratione adhiberi centrum gravitatis corporum A, & D, quod

eſt

est punctum H, in quo recta BE secat rectam AD. Ducto siquidem ad planum perpendiculo HL, erit differentia factorum ex A in AM, & ex D in DO æqualis ei, quod fit ex A, & D in HL. Sed propter commune centrum corporum omnium id, quod fit ex A, & D in HL æquale est facto ex B in BN. Itaque differentia factorum ex A in AM, & ex D in DO æqualis erit facto ex B in BN; adeòque factum ex D in DO æquale erit duobus factis, uni ex A in AM, alteri ex B in BN.

Sit nunc PQ planum alterum, respectu cujus existant ad eandem partem corpora A, B, D. Demittantur ad planum istud, tam ex propriis centris eorum corporum perpendicula AP, BQ, DR, quàm ex communi eorundem centro E perpendiculum EI. Dico pondera corporum A, B, D ducta in sua respectivè perpendicula AP, BQ, DR tantum efficere, quantum si eadem pondera simul multiplicentur per perpendiculum EI.

Ducatur enim per punctum E planum MN, æquidistans ipsi PQ, cum quo conveniant perpendicula AP, BQ, DR producta si opus in punctis M, N, O; jamque propter æquales MP, NQ, OR, EI erunt facta quatuor, unum ex A in MP, alterum ex B in NQ, tertium ex D in DR, quartum ex D in DO, æqualia ei, quod oritur,

tur, multiplicando A, B, & D per EI. Sed factum ex D in DO æquale est factis A in AM, & ex B in BN. Itaque erunt facta tria unum ex A in AP, alterum ex B in BQ, tertium ex D in DR, æqualia ei, quod fit ex A, B, & D in EI.

Denique sit ST planum tertium, respectu cujus existant corpora duo A, & B ad unam partem, corpus verò tertium D ad partem alteram. Ducantur similiter ad planum istud, tum ex propriis corporum centris perpendicula AS, BT, DV, cùm ex communi omnium centro E perpendiculum EX. Dico excessum, quo facta ex A in AS, & ex B in BT superant factum ex D in DV, æqualem esse ei, quod fit, multiplicando A, B, & D per EX.

Ducatur namque ad alteram corporum partem planum PQ, æquidistans ipsi ST, cum quo conveniant perpendicula omnia in punctis P, Q, R, & I; jamque si ex factis ex A in AP, ex B in BQ, & ex D in DR subducantur facta ex A in SP, ex B in TQ, & ex D in VR, remanebit excessus, quo facta ex A in AS, & ex B in BT superant factum ex D in DV. Sed facta tria priora æqualia sunt ei, quod fit ex A, B, & D in EI, & facta tria posteriora æqualia sunt facto ex A, B, & D in XI; adeòque id, quod remanet, subducendo secunda ex primis, est fa-

ctum

ctum ex A, B, & D in EX. Igitur excessus, quo facta ex A in AS, & ex B in BT superant factum ex D in DV, æqualis erit ei, quod fit ex A, B, & D in EX.

Non dissimiliter easdem proprietates ostendemus, quum commune centrum gravitatis ad quatuor, aut plura corpora refertur; & omnino superfluum existimamus super hac re ulteriùs labores nostros extendere. Tantùm notabimus, proprietatem primam in tertiâ contineri. Nam siquidem perpendiculum, quod ex communi centro gravitatis ducitur ad planum, de quo agitur in tertiâ proprietate, minuatur in infinitum, transibit planum illud per ipsum commune centrum, & factum ex ponderibus corporum omnium in perpendiculum illud evanescet. Unde quum evanescat etiam differentia inter facta ex ponderibus corporum ad unam plani partem existentium in suas ab illo plano distantias, & facta ex ponderibus corporum ad alteram plani partem collocatorum in suas similiter distantias ab eodem illo plano; fient facta prima æqualia secundis, adeòque tertia proprietas primam nobis restituet.

Cæterùm si pondera corporum sint æqualia, quæ de productis ex ponderibus in suas respectivè distantias dicta sunt, vera erunt quoque de ipsis distantiis, quæ productis iis

proportione correſpondent. Quocirca ſi planum tranſeat per commune centrum gravitatis, erunt diſtantiæ corporum ad unam plani partem exiſtentium æquales diſtantiis corporum ad aliam plani partem collocatorum. Quod ſi verò corpora omnia fuerint ad eandem alicujus plani partem, erunt diſtantiæ corporum omnium æquales diſtantiæ communis centri gravitatis toties ſumptæ, quotus eſt numerus corporum. Et denique ſi corpora nonnulla fuerint ad unam alicujus plani partem, & corpora reliqua ad partem alteram, erit differentia inter diſtantias illorum, & diſtantias iſtorum æqualis diſtantiæ communis centri gravitatis toties etiam acceptæ, quot ſunt corpora omnia.

CAP. III.

De methodo determinandi centrum gravitatis in figuris regularibus, ubi etiam de centro percuſſionis, & regulâ Guldini.

SEcunda proprietas, quam de communi centro gravitatis quotcumque corporum ſuperiori capite demonſtratam attulimus: nimirum, quod ſi ad eandem alicujus plani partem exiſtant corpora quotcumque, pondera eorum, ducta in diſtantias ſuorum cen-

centrorum ab illo plano, tantum efficiant, quantum eadem pondera, ducta in distantiam communis centri gravitatis ab eodem illo plano; suppetit nobis duo præclara theoremata, quorum ope facile erit in figuris regularibus tam planis, quàm solidis gravitatis centrum determinare.

Sit itaque primum CAC figura aliqua plana regularis, ita ut omnes rectæ lineæ, quæ in ipsâ ordinantur, æquidistantes basi CC, secentur bifariam per diametrum AB. Concipiatur circa eandem diametrum AB descripta figura alia DAD talis naturæ, ut ductâ ex quolibet puncto diametri ordinatâ MNO, sit semper ut MN ad MO, ita recta aliqua magnitudine data AH ad abscissam utrique ordinatæ communem AM. Dico, quod si in eâdem diametro AB capiatur tale punctum S, ut figura CAC sit ad figuram DAD, quemadmodum est AH ad AS; punctum S sit centrum gravitatis figuræ planæ CAC. FIG. 25.

Per infinitas namque rectas lineas parallelas ipsi CC dividatur area totius figuræ CAC in infinitas areolas. Et quoniam omnes istæ areolæ considerari possunt velut totidem exigua parallelogramma, bisecta per diametrum AB; erunt centra gravitatis omnium earum areolarum in ipsâ diametro AB: nam id, velut naturali lumine notum,

 ul-

ultro ab omnibus conceditur, centrum gravitatis figuræ parallelogrammæ in rectâ lineâ eam bisecante reperiri. Ex quo fit, ut ipsum totius figuræ CAC centrum, quod est centrum commune omnium illarum areolarum, existat in eâdem diametro AB.

Concipiamus porro per verticem figuræ A transire planum, cui insistat ad rectos angulos diameter AB; jamque ob proprietatem illam initio hujus capitis memoratam, si figuræ CAC sit S centrum gravitatis, areolæ omnes illius figuræ, ductæ in distantias suorum centrorum ab illo plano, tantundem efficient, quantum figura tota CAC, ducta in AS. Unde quia figura CAC est ad figuram DAD, ut AH ad AS, atque adeo factum ex figurâ CAC in AS æquale est ei, quod fit ex figurâ DAD in AH; patebit punctum S esse centrum figuræ CAC, siquidem ostendi possit areolas omnes illius figuræ, ductas in distantias suorum centrorum à plano prædicto, tantundem efficere, quantum figura DAD, ducta in AH.

Id autem ostendemus in hunc modum. Sit NQQN una ex areolis figuræ CAC, cui correspondeat in figurâ DAD areola ORRO. Et quoniam duæ istæ areolæ considerari possunt, velut parallelogramma duo, in iisdem parallelis constituta; erunt eæ inter se, quemadmodum sunt bases ipsarum NN, OO,

OO, five etiam ut basium semisses MN, MO. Sed MN est ad MO, ut AH ad AM. Quare erit ex æquali, ut areola NQQN ad areolam ORRO, ita AH ad AM: & propterea quum AM sumi possit pro distantiâ centri gravitatis areolæ NQQN à plano per verticem transeunte; erit factum ex areolâ NQQN in prædictam sui centri distantiam à plano illo æquale ei, quod fit ex areolâ ORRO in rectam AH.

Eâdem ratione ostendetur, areolam quamvis aliam figuræ CAC, ductam in distantiam sui centri ab eodem illo plano, tantundem efficere, quantum area correspondens figuræ DAD, ducta in rectam AH. Et igitur componendo areolæ omnes figuræ CAC, ductæ in distantias suorum centrorum à prædicto plano, tantundem efficient, quantum area tota figuræ DAD, ducta in rectam AH: adeòque, quia factum istud æquale est ei, quod fit ex figura CAC in rectam AS; erit recta ista AS distantia centri gravitatis figuræ CAC ab eodem prædicto plano; & propterea ipsum figuræ centrum erit punctum S.

Atque hoc quidem est theorema pro determinando centro gravitatis in figuris planis regularibus. Quantum ad figuras solidas regulares, assumatur rursus ut antea figura plana regularis CAC, circa cujus

diametrum AB descripta concipiatur altera figura plana DAD talis naturæ, ut ductâ ex quolibet puncto diametri ordinatâ MNO, sit semper, ut MN quadratum ad MO quadratum, ita recta quævis magnitudine data AH ad abscissam utrique ordinatæ communem AM. Dico, quod si in eâdem diametro AB capiatur tale punctum S, ut solidum descriptum ex revolutione figuræ CAC circa diametrum AB sit ad solidum descriptum ex revolutione figuræ DAD circa eandem diametrum AB, veluti est AH ad AS; punctum S sit centrum gravitatis solidi prioris.

Dividatur namque solidum illud per infinita plana æquidistantia plano basis in infinitas portiones, quas elementa ejus solidi appellabimus. Et quoniam omnia ista elementa considerari possunt, veluti totidem cylindruli descripti circa diametrum AB; erunt centra gravitatis omnium eorum elementorum in ipsâ diametro AB: nam id, tamquam naturali lumine notum, ultro ab omnibus admittitur, centrum gravitatis cujuscumque cylindri in axe ejus reperiri, utpote qui dispescit cylindrum ipsum in duas partes æquales. Ex quo fit, ut ipsum totius solidi centrum, quod est centrum commune omnium illorum elementorum, existat in eâdem diametro AB.

Concipiamus porro per verticem solidi A transi-

transfire planum, cui insistat ad rectos angulos diameter AB; jamque si solidi, orti ex revolutione figuræ CAC, S sit centrum gravitatis, ob proprietatem illam initio hujus capitis memoratam, elementa omnia ejus solidi, ducta in distantias suorum centrorum ab illo plano, tantundem efficient, quantum solidum totum, ductum in AS. Unde quia solidum ortum ex revolutione figuræ CAC est ad solidum ortum ex revolutione figuræ DAD, ut AH ad AS; atque adeò factum ex solido priori in AS æquale est ei, quod fit ex solido altero in AH: patebit punctum S esse centrum gravitatis solidi orti ex revolutione figuræ CAC, siquidem ostendi possit, omnia hujus solidi elementa, ducta in distantias suorum centrorum à plano prædicto, tantundem efficere, quantum solidum ortum ex revolutione figuræ DAD, ductum in AH.

Id autem ostendemus in hunc modum. Sit figuræ CAC areola quævis NQQN, cui correspondeat in figura DAD areola ORRO. Et quoniam elementa solidorum, quæ à duabus hisce areolis describuntur, considerari possunt, velut cylindruli duo in iisdem parallelis constituti; erunt elementa illa, ut quadrata rectarum NN, OO, sive etiam ut quadrata semissium MN, MO. Est autem, ut MN quadratum ad MO quadratum, ita AH ad AM. Quare erit ex æquali, ut ele-

mentum descriptum ab areolâ NQQN ad elementum descriptum ab areolâ ORRO, ita AH ad AM; & propterea, quia AM sumi potest pro distantiâ centri gravitatis prioris elementi à plano per verticem transeunte, erit factum ex elemento illo in prædictam sui centri distantiam æquale ei, quod fit ex elemento altero in rectam AH.

Eâdem ratione ostendetur, elementum quodvis aliud solidi orti ex revolutione figuræ CAC, ductum in distantiam sui centri ab eodem illo plano, tantundem efficere, quantum correspondens elementum solidi orti ex revolutione figuræ DAD, ductum in rectam AH. Et igitur componendo elementa omnia solidi prioris, ducta in distantias suorum centrorum à prædicto plano, tantundem efficient, quantum solidum alterum ductum in rectam AH: adeòque quia factum istud æquale est ei, quod fit ex solido priori in rectam AS; erit recta ista AS distantia centri gravitatis solidi orti ex revolutione figuræ CAC ab eodem prædicto plano; & propterea ipsum illius solidi centrum erit punctum S.

In utroque hoc theoremate, supposuimus figuras, de quibus agitur, esse ejusdem ubique densitatis: idque ea ratione, ut pondera tum ipsarum, tum suorum elementorum per suas respectivè magnitudines possent

de-

definiri. Sed si non eadem sit densitas in singulis elementis figuræ propositæ, oportebit illam in aliam transmutare, cujus elementa singula eandem densitatem habentia sint ejusdem ponderis cum singulis elementis illius. Nam si alia ista figura descripta concipiatur circa eandem diametrum AB, habebit ea cum figurâ propositâ idem centrum gravitatis, quum idem sit pondus in singulis elementis utriusque; adeòque iisdem illis theorematibus determinabitur centrum gravitatis figuræ propositæ, siquidem in determinatione loco ejus aliam istam figuram usurpemus.

Hanc porro figuram ex datâ variatione densitatis facili negotio obtinebimus. Detur etenim primò figura plana CAC, cujus ordinatæ, sive potiùs areolæ diversas habeant densitates. Sit ABEF scala densitatis, hoc est figura, quæ ordinatis suis MK designet diversas densitates ordinatarum MN figuræ propositæ. Concipiatur circa diametrum AB descripta figura alia DAD, in qua unaquæque ordinata MO obtineat densitatem designatam per datam rectam AH, habeatque talem longitudinem, ut MN sit ad ipsam MO, veluti est AH ad MK. Dico areolas singulas hujus figuræ idem pondus habere cum singulis areolis figuræ propositæ CAC; adeòque idem esse centrum gravita-

vitatis utriusque figuræ.

Capiatur enim in figurâ CAC areola quævis NQQN, cui correspondeat in figurâ DAD areola ORRO. Et quoniam AH designat densitatem ordinatæ MO, sive potiùs areolæ ORRO, & MK densitatẽ ordinatæ MN, sive etiam areolæ NQQN; erit ut AH ad MK, ita densitas areolæ ORRO ad densitatem areolæ NQQN. Sed AH est ad MK, ut MN ad MO, hoc est ut areola NQQN ad areolam ORRO. Itaque duæ istæ areolæ erunt inter se in reciprocâ suarum densitatum ratione; & propterea idem erit pondus utriusque. Eâdem ratione ostendetur, areolam quamvis aliam figuræ CAC tantundem ponderare, quantum areola correspondens figuræ DAD. Unde sequitur, idem esse centrum gravitatis utriusque figuræ.

Detur secundò solidum ortum ex revolutione figuræ planæ CAC circa diametrum AB, sitque adhuc ABEF scala densitatis. Concipiatur circa diametrum AB descripta altera figura plana DAD, in qua unaquæque ordinata MO obtineat densitatem designatam per rectam magnitudine datam AH, & habeat talem longitudinem, ut quadratum ex MN sit ad quadratum ex ipsâ MO, veluti est AH ad MK. Dico elementa singula solidi orti ex revolutione alterius hujus figuræ idem pondus habere cum singulis ele-

men-

mentis solidi dati, atque adeò idem esse centrum gravitatis utriusque solidi.

Quoniam enim AH designat densitatem areolæ ORRO, designabit eadem AH densitatem elementi; quod in revolutione figuræ DAD ab areolâ illâ describitur. Et similiter, quia MK denotat densitatem areolæ NQQN, denotabit eadem MK densitatem elementi, quod in revolutione figuræ CAC areola illa describit. Quare densitas prioris elementi erit ad densitatem alterius, ut AH ad MK: Sed AH est ad MK, ut MN quadratum ad MO quadratum, hoc est ut elementum descriptum ab areolâ NQQN ad elementum descriptum ab areolâ ORRO. Itaque duo ista elementa erunt inter se in reciprocâ suarum densitatum ratione; & propterea idem erit pondus utriusque. Eodem argumento ostendetur, elementum quodvis aliud solidi orti ex revolutione figuræ CAC tantundem ponderare, quantum correspondens elementum solidi orti ex revolutione figuræ DAD. Unde sequitur, idem esse centrum gravitatis utriusque solidi.

Hoc eodem artificio determinari quoque potest centrum, quod vocant percussionis, quum figuræ percutientis elementa omnia non eâdem velocitate moveri supponuntur, nec proinde momenta ipsorum ponderibus suis proportione correspondent: nimi-

mirum transmutando eam in aliam, cujus elementa singula eâdem velocitate lata idem habeant momentum cùm singulis elementis figuræ propositæ. Quod equidem quum fit, jam quæstio de inveniendo centro percussionis eò reducetur, ut novæ istius figuræ, circa eandem cum illâ diametrum descriptæ, gravitatis centrum inveniatur; nam quotiescumque figura subinde moveri supponitur, ut ejus elementa omnia eâdem velocitate ferantur, centrum gravitatis, & centrum percussionis in eâ confunduntur.

Vocant siquidem Mechanici in figurâ, quæ movetur, centrum percussionis punctum illud, in quo omne ejus momentum colligitur, & coacervatur, quodq; proinde tale est, ut si eo figura alicui occurreret obstaculo, magis illud percuteret, quàm si alio quovis puncto in idem obstaculum impingeret. Ex quo patet, punctum istud ita quidem in figurâ situm esse debere, ut momenta omnium elementorum ad unam ejus partem existentium, æquilibrentur in puncto illo cum momentis elementorum, quæ ad partem alteram consistunt. Unde, quia momenta tam illorum, quàm istorum ponderibus suis proportione correspondent, quotiescumque figura subinde ponitur moveri, ut singula ejus elementa eâdem ferantur velocitate; æquilibrabuntur in hoc casu pondera

ele-

elementorum ad unam partem existentium cum ponderibus elementorum ad partem alteram collocatorum, & propterea centrum percussionis idem erit cum centro gravitatis.

Sed nō perinde res est, quum singula figuræ elementa diversis feruntur velocitatibus. Tunc enim momentum cujusque elementi est, ut pondus, & velocitas conjunctim: proindeque, non quidem pondera elementorum, hinc inde à centro percussionis existentium, sed facta ex iis ponderibus in suas respectivè velocitates debent in puncto illo inter se mutuò æquilibrari. Unde necesse est, ut centrum percussionis removeatur nonnihil à centro gravitatis, & inter ea collocetur elementa, quæ majori velocitate urgentur; ut scilicet illa, quibus minor inest velocitas, majorem ab eo distantiam hebeant, & consequenter majorem velocitatem relativam acquirant. Ex quo colligi potest, distantiam inter centrum gravitatis, & centrum percussionis eò debere esse majorem, quo magis differunt à se mutuò velocitates, quibus figuræ elementa feruntur.

Hac ratione si recta linea AB parallelo motu agatur, quia omnia ejus elementa eâdem velocitate feruntur, erit in eâ centrum percussionis idem, ac centrum gravitatis: proindeque utrumque existet in medio ipsius FIG. 26.

sius rectæ lineæ AB, si eadem ubique sit densitas. Sed si ponamus, rectam AB circa punctum A circulariter moveri, tunc centrum percussionis erit in tali puncto C, ut portio AC sit dupla reliquæ CB. Nam si circa ipsam AB descriptum concipiamus triangulum æquicrure DAD; momenta, quæ habent singula elementa rectæ AB, erunt inter se, ut correspondentes areolæ hujus trianguli; adeoque, quemadmodum omnes istæ areolæ æquilibrantur in puncto C, quod est earum commune centrum gravitatis, ita & in eodem puncto C momenta eorum elementorum manebunt æquilibrata.

Itaque, ubi figuræ diameter motu fertur parallelo, quia omnia ejus elementa eâdem urgentur velocitate, inveniendo centrum gravitatis, invenitur etiam centrum percussionis, quum duo ista centra simul confundantur, nec unum ab altero differat. Sed quotiescumque figuræ elementa diversis feruntur velocitatibus: (id, quod contingit, quum diameter figuræ circa datum aliquod punctum circulariter movetur,) inveniri poterit centrum percussionis, transmutando eam in aliam, cujus elementa singula eâdem velocitate lata, idem habeant momentum cum singulis elementis illius. Nam siquidem hæc altera figura descripta concipiatur circa eandem diametrum, habebit ea

idem

idem centrum percussionis cum figurâ propositâ; adeòque inveniendo ejus centrum gravitatis, habebitur centrum percussionis utriusque figuræ.

Hanc aliam verò figuram facili negotio obtinebimus, quum notæ sunt diversæ velocitates, quibus propositæ figuræ elementa feruntur: nimirum eodem illo artificio, quo ex datis diversis densitatibus, quas habent figuræ alicujus elementa, invenitur figura alia, cujus elementa eandem densitatem habentia sint ejusdem ponderis cum elementis illius; nam quemadmodum pondus ex magnitudine, & densitate desumitur, sic momentum ex pondere, & velocitate est repetẽdum. Tantùm notabimus, scalam velocitatis, hoc est figuram, quæ ordinatis suis correspondentibus designat diversas velocitates elementorum datæ figuræ, rectâ lineâ semper terminari; quandoquidem diversæ illæ velocitates non aliunde oriuntur, quàm quia diameter figuræ datæ circa punctum aliquod circulariter movetur: unde etiam necesse est, ut recta linea terminans scalam velocitatis transeat semper per centrum motus circularis.

Ex eâdem illâ proprietate, initio hujus capitis memoratâ, profluit etiam prono alveo regula Guldini, quod figura, quæ oritur ex revolutione cujuslibet magnitudinis cir-

circa aliquam rectam positione datam æqualis sit facto ex magnitudine genitrice in viam sui centri gravitatis. Nam divisâ magnitudine istâ per suas ad axem rotationis ordinatas in innumera elementa; erunt facta ex omnibus hisce elementis in distantias suorum centrorum ab axe illo æqualia ei, quod fit ex magnitudine totâ in distantiam sui centri ab eodem axe: adeòque, quia distantia cujusque centri ab axe rotationis est, ut via, per quam fertur centrum illud; erunt facta ex iisdem elementis in vias suorum centrorum æqualia ei, quod fit ex magnitudine totâ in viam proprii sui centri. Jam verò, quum centrum cujusque elementi in medio ejus reperiatur, facta illa dant elementa figuræ genitæ, atque adeò omnia simul ipsam figuram genitam adæquant. Itaque factum ex magnitudine genitrice in viam sui centri gravitatis æqualis erit figuræ genitæ.

Hæc regula Guldini locum sibi vindicat tantùm, quum magnitudo genitrix est ejusdem ubique densitatis. Sed eadem obtinet non solùm in figuris rotatione genitis, verùm etiam in iis, quæ alio quovis motu generantur, dummodo motus tali lege fiat, ut magnitudo genitrix insistat semper ad rectos angulos super lineâ, quam gravitatis suæ centrum motu illo describit. Sit enim CD

II-

linea descripta à centro gravitatis in motu magnitudinis AB eâ lege facto. Capiatur in eâ portio indefinitè parva CE, sitque FG situs magnitudinis, dum centrum gravitatis reperitur in E, & conveniant AB, FG in puncto H. Itaque, propter legem motus suppositam, portio curvæ CE considerari potest, velut arcus circuli descriptus ex puncto H tamquam centro; adeòque, quia magnitudo AB rotatur circa punctum H, dum ejus centrum describit portionem CE, figura interea temporis genita æquabitur facto ex AB in CE. Eodem argumento ostendemus, figuram, quæ generatur, dum describitur portio subsequens indefinitè parva EI, æquari facto ex AB in EI. Et igitur componendo, figura genita incessu per totam curvam CD æquabitur facto ex AB in CD, hoc est ex magnitudine genitrice in viam sui centri gravitatis. FIG. 27.

CAP. IV.

De æquilibrio potentiarum, unum idemque corpus trahentium, & de mediis earundem directionibus.

Accidit interdum, ut unum, idemque corpus à pluribus potentiis trahatur, quæ ita disponi possunt, ut maneant inter se mutuò æquilibratæ, nec ulla secum cor-

pus adducat. Jam quotcumque fuerint potentiæ corpus trahentes, ut legem æquilibrii inveniamus, illud primò statui debet, quod ubi corpus duabus tantùm trahitur potentiis, nequeat fieri inter eas æquilibrium, nisi ipsæ sint æquales, & earum directiones omnino contrariæ. Neque enim possunt directiones potentiarum angulum constituere; quia sic corpus, in quo nullam in hoc casu resistentiam consideramus, moveretur per diagonalē parallelogrammi, cujus latera directiones, & vires potentiarum designant. Neque etiam potentiæ ipsæ possunt esse inæquales inter se; quia sic major minorem vinceret, & secum corpus adduceret.

FIG. 28. Ponamus modò corpus A à tribus potentiis trahi, quarum directiones, & quantitates designentur per rectas AB, AC, AD. Et quoniam, completo parallelogrammo ABEC, corpus perinde trahitur à potentiis AB, AC, ac si traheretur à potentiâ, designatâ per diagonalem AE; æquilibrabitur potentia AD cum ipsis AB, AC, siquidem servare possit æquilibrium cum potentiâ AE. Sed duæ istæ potentiæ AD, AE nequeunt manere inter se mutuò æquilibratæ, nisi ipsæ sint æquales, & earum directiones omnino contrariæ. Itaque potentia designata per rectam AD æquilibrabitur cum aliis duabus po-

potentiis, quas referunt rectæ AB, AC, si completo parallelogrammo ABEC pergat AD producta ad punctum E, & fiat AE æqualis ipsi AD.

Eâdem igitur ratione potentia AC æquilibrabitur cum duabus aliis AB, AD, si completo parallelogrammo ABFD pergat AC producta ad punctum F, & fiat AF æqualis ipsi AC. Atque ita quoque potentia AB æquilibrata manebit cum duabus aliis AC, AD, si completo parallelogrammo ACGD pergat AB producta ad punctum G, & fiat AG æqualis ipsi AB. Verùm facile erit ostendere, æquilibrium inter potentias mutuum esse debere, quotiescumque potentia una, velut AD, æquilibratur cum duabus aliis AB, AC; nam semper ac AD producta pergit ad E, & fit AE æqualis AD, necesse est, ut similiter aliæ duæ AC, AB productæ pergant ad F, & G, & fiant AF, AG æquales ipsis AC, AB.

Atque hinc modò patet ratio ejus theorematis, quod sine demonstratione Torricellio proposuit Robervallius: nimirum, quod si tres potentiæ AB, AC, AD trahentes punctum A consistant in æquilibrio, punctum illud sit centrum gravitatis trianguli BCD. Nam, quum ratione æquilibrii AD producta pergat ad E, bisecabit ea latus trianguli BC, adeòque in ipsâ erit centrum gravitatis.

Similiter, quia propter æquilibrium AC producta pergit ad F, ea bisecabit latus trianguli BD, atque adeo ipsa quoque transibit per centrum gravitatis. Unde necesse est, ut centrum gravitatis sit punctum A, quod à potentiis trahitur, utpote commune utrique ipsarum DE, CF.

Patet etiam veritas theorematis illius, cui totam fermè mechanicam suam superextruxit Petrus Varignonius: scilicet quod si tres potentiæ AB, AC, AD in unum, idemque corpus agentes maneant æquilibratæ, unaquæque sit, ut sinus anguli sub aliarum directionibus contenti. Nam completo parallelogrammo ABEC, quia AC est æqualis BE, & angulus CAE æqualis est angulo BEA; erit ut AB ad AC, ita sinus anguli CAE ad sinum anguli BAE. Sed, quum AD producta pergat ad E, sinus angulorum CAE, BAE iidem sunt, ac sinus angulorum CAD, BAD. Quare erit, ut AB ad AC, ita sinus anguli CAD ad sinum anguli BAD. Eâdem ratione ostendemus, AC esse ad AD, ut est sinus anguli BAD ad sinum anguli BAC; & AD esse ad AB, ut est sinus anguli BAC ad sinum anguli CAD. Itaque in casu æquilibrii unaquæque potentia erit, ut sinus anguli sub aliarum directionibus contenti.

Patet demum, quod si tres potentiæ AB, AC,

AC, AD trahentes punctum A consistant in æquilibrio, & punctis B, C, D, quibus terminantur rectæ lineæ potentias illas designantes, ponantur tria pondera æqualia B, C, D; commune centrum gravitatis eorum ponderum sit ipsum punctum A. Nam, quum recta AD producta pergat ad E, ea distantiam ponderum B, & C secabit bifariam in H; adeòque erit ut pondus B ad pondus C, ita CH ad BH. Et quoniam AE secatur quoque bifariam in H; erit AE, sive AD dupla ipsius AH: proindeque pondera B, & C simul erunt ad pondus tertium D, ut AD ad AH. Unde ex methodo superiùs traditâ de inveniendo communi centro gravitatis quotcumque corporum, erit punctum A commune centrum gravitatis trium ponderum æqualium B, C, D.

Ex quibus modò tres nobis derivantur canones, pro indagando mutuo æquilibrio trium potentiarum AB, AC, AD trahentium unum idemque corpus A, quod velut punctum omnis expers resistentiæ consideramus. Primò nempe si punctum A sit centrum gravitatis trianguli BCD, quod constituunt rectæ lineæ BC, CD, DB ductæ per extremitates earum, quæ potentias ipsas designant. Secundò si quælibet potentia sit, ut sinus anguli, quem aliarum directiones comprehendunt. Et denique si idem punctum

A ſit commune centrum gravitatis trium ponderum æqualium, exiſtentium in extremitatibus rectarum, per quas potentiæ illæ deſignantur.

Verùm ex his omnibus tertius dumtaxat, ſive poſtremus peculiarem meretur contemplationem, quippe qui locum ſibi vindicat, quotcumque fuerint potentiæ corpus trahentes. Eſt enim in hac re theorema quidem generale, ut plures potentiæ, quæ unum, idemque punctum trahunt, nequeant eſſe in æquilibrio, niſi punctum illud ſit commune centrum gravitatis totidem ponderum æqualium, exiſtentium in extremitatibus rectarum, quæ potentias illas deſignant; nec equidem aliam hujus æquilibrii legem, ſive ſimpliciorem, ſive univerſaliorem dari poſſe exſtimamus, quàm quæ hoc theoremate continetur.

Poteſt autem veritas hujus theorematis ſuaderi, oſtendendo, quod quotieſcumque punctum, quod trahitur, eſt commune centrum gravitatis totidem ponderum æqualium, exiſtentium in extremitatibus rectarum, per quas potentiæ deſignantur, unaquæque potentia ſit æqualis, & contraria ei, quæ oritur ex aliarum omnium compoſitione. Hinc enim perſpicuum fiet, perinde eſſe, ſi punctum trahatur ab omnibus iis potentiis, ac ſi traheretur à duabus tantùm æqualibus,

libus, & contrariis; adeòque quemadmodum in hoc casu punctum manet immotum, ita etiam manebit immotum in casu primo, atque adeò potentiæ illud trahentes erunt in æquilibrio.

Trahatur itaque punctum A à potentiis quotcumque, quarum vires, & directiones designent rectæ AB, AC, AD, AE, AF, &c., sitque punctum illud commune centrum gravitatis totidem ponderum æqualium B, C, D, E, F, existentium in extremitatibus rectarum, quæ illas referunt potentias. Producatur una ipsarum, velut AB, in directum versus A; & quia A est commune centrum gravitatis ponderum omnium B, C, D, E, F, transibit illa per punctum G, commune centrum gravitatis ponderum aliorum C, D, E, F; eritque, ut pondus B ad pondera reliqua C, D, E, F, hoc est, propter æqualitatem ponderum, ut unitas ad numerum ponderum omnium unitate multatum, ita AG ad AB; & propterea si AG per hunc numerum multiplicetur, eadem ipsi AB æqualis orietur. FIG. 29.

Sit AH tale multiplex ipsius AG; jamque si ostendi possit, omnes alias potentias AC, AD, AE, AF componere simul potentiam designatam per AH, liquidò patebit, potentiam AB esse æqualem, & contrariam ei, quæ ex aliarum omnium compositione nasci-

fcitur. Id autem oftendemus in hunc modum. Ducatur per punctum A, utcumque planum LN, ad quod ex punctis C, D, E, F, G demittantur perpendicula CI, DL, EM, FN, GO, & refolvatur unaquæque potentiarum AC, AD, AE, AF in duas alias, unam ducto plano perpendicularem, alteram eidem parallelam; eruntque CI, DL, EM, FN omnes potentiæ perpendiculares, & AI, AL, AM, AN omnes potentiæ parallelæ.

Quia igitur potentiæ obliquæ AC, AD, AE, AF æquipollent perpendicularibus CI, DL, EM, FN, & parallelis AI, AL, AM, AN; æquipollebit potentia ex iis compofita fimiliter duabus aliis, quarum una oritur ex compofitione potentiarum perpendicularium, altera ex compofitione potentiarum parallelarum. Jam verò potentia, quæ oritur ex perpendicularibus, eft exceffus, quo DL, EM, FN ad unam partem exiftentes fuperant CI, quæ exiftit ad partem alteram; & fimiliter potentia, quæ nafcitur ex parallelis, eft exceffus, quo AI; AL tendentes ad partem unam fuperant AM, AN, quæ diriguntur ad plagam oppofitam. Quare potentia compofita ex obliquis AC, AD, AE, AF æquipollebit duabus aliis, quarum una defignatur per exceffum, quo DL, EM, FN fuperant CI, altera per exceffum, quo AI, AL fu-

ſuperant AM, AN.

Et quoniam punctum G eſt commune centrum gravitatis ponderum æqualium C, D, E, F; per ea, quæ ſuperiùs oſtenſa ſunt de communi quotcumque ponderum centro gravitatis, erit tum exceſſus, quo DL, EM, FN ſuperant CI, æqualis GO toties ſumptæ quotus eſt numerus ponderum, tum exceſſus, quo AI, AL ſuperant AM, AN æqualis AO toties etiam acceptæ, quot ſunt eadem pondera. Sed demiſſo ex puncto H ad idem planum perpendiculo HR, hæc ipſarum GO, AO æque multiplicia ſunt rectæ HR, AR; quum AH tale etiam ſit multiplex ipſius AG. Itaque erit HR exceſſus, quo DL, EM, FN ſuperant CI, & AR exceſſus, quo AL, AI ſuperant AM, AN: proindeque potentia, quæ componitur ex obliquis AC, AD, AE, AF æquivalebit potentiis HR, AR; adeòque deſignabitur per ipſam AH.

Quum itaque potentiæ AC, AD, AE, AF componant ſimul potentiam deſignatam per AH, erit potentia AB æqualis, & contraria ei, quæ ex illarum omnium naſcitur compoſitione. Eodem argumento oſtendetur, quamvis aliam ex iiſdem potentiis eſſe æqualem, & contrariam ei, quam omnes aliæ ſimul componunt. Et igitur perinde erit, quum punctum A trahitur à poten-

tiis

tiis AB, AC, AD, AE, AF, ac si traheretur à duabus tantùm potentiis æqualibus, & contrariis: Unde consequens est, ut punctum illud maneat immotum, atque adeò ut ipsæ potentiæ æquilibrentur inter se mutuò.

Atque hinc modò patet ratio alterius theorematis, quod Torricellio proposuit Robervallius: nimirum, quod si punctum aliquod trahatur à quatuor potentiis, in eodem plano non existentibus, quæ consistant in æquilibrio, punctum illud sit centrum gravitatis pyramidis ejus, cujus angulis terminantur rectæ lineæ, per quas potentiæ illæ designantur. Nam quemadmodum centrum gravitatis cujusque trianguli idem est cum communi centro gravitatis trium ponderum æqualium, in trianguli angulis existentium; ita centrum gravitatis cujusque pyramidis triangularis confunditur cum communi centro gravitatis quatuor ponderum æqualium, quæ in angulis illius pyramidis existunt.

Ex ipsâ autem generalis ejus theorematis demonstratione pulcherrima nobis nascitur methodus, potentias quotcumque componendi, quæ unum, idemque corpus trahunt, & determinandi mediam earundem directionem, hoc est lineam, secundùm quam agere debet in corpus potentia ex omnibus com-

po-

posita, quo idem pariat effectum. Trahatur etenim corpus A, quod velut punctum omnis resistentiæ expers consideramus, à potentiis AC, AD, AE, AF; & determinanda sit tum potentia, quæ ex earum omnium compositione nascitur, tum media earundem directio. FIG. 29.

Extremitatibus rectarum, per quas potentiæ illæ designantur, ponantur totidem pondera æqualia C, D, E, F. Horum omnium ponderum inveniatur commune centrum gravitatis, & sit punctum G. Jungatur recta AG, cujus tam multiplex constituatur AH, quotus est numerus ponderum, sive ipsarum potentiarum. Dico, rectam istam AH designare tam potentiam, quæ oritur ex compositione ipsarum AC, AD, AE, AF, quàm mediam earundem directionem, sive lineam, secundùm quam agere debet in corpus potentia composita, quò eundem producat effectum.

Ipsi enim AH æqualis, & in directum constituatur AB, cujus extremitati ponatur pondus B æquale cuilibet ipsorum C, D, E, F. Et quoniam AG est ad AH, sive AB, ut unitas ad numerum ponderum C, D, E, F; erit etiam, ut AG ad AB, ita pondus B ad pondera C, D, E, F: & idcircò quum punctum A sit commune centrum gravitatis ponderum æqualiũ B,C,D,E,F; per ostensum theo-

theorema, si punctum illud trahatur à potentiis AB, AC, AD, AE, AF, manebit idem immotum, & ipsæ potentiæ erunt in æquilibrio. Unde, quum potentia AB æquilibretur cum aliis AC, AD, AE, AF; quæ ex istis componitur, ei æqualis erit, & contraria: adeòque, quia ipsi AB æqualis est, & contraria AH, designabit AH tum potentiam, quæ oritur ex compositione ipsarum AC, AD, AE, AF, tum mediam earundem directionem.

Quod si commune centrum gravitatis ponderum æqualium C, D, E, F incidat in ipsum punctum A; tunc evanescente AG, evanescet etiam AH, quæ est multiplex ipsius AG secundùm multitudinem ponderum; adeòque tam potentia, quæ componitur ex ipsis AC, AD, AE, AF nulla fiet, quàm media earundem directio nullibi reperietur. Id verò mirum esse non debet. Nam quotiescumque punctum A est commune centrum gravitatis ponderum æqualium C, D, E, F; per ostensum theorema servabitur æquilibrium inter potentias AC, AD, AE, AF, à quibus trahitur punctum illud: proindeque se mutuò destruentes, perinde erit, ac si nequaquam puncto A essent applicatæ.

Huc usque consideravimus corpus, quod à potentiis trahitur, tamquam merum punctum:

ctum: idque ea ratione, ut potentiæ omnes corpus trahentes uni, eidemque corporis puncto essent applicatæ. Sed videamus modò quid sit futurum, quum potentiæ, per quas corpus trahitur, diversis corporis punctis applicantur. Quem in finem referat AB corpus aliquod inflexile, omnisque expers resistentiæ, cui ad puncta diversa aplicentur primum potentiæ duæ AC, BD, quæ illud secum versus eandem partem trahere conentur. FIG. 30.

Producantur AC, BD usque donec conveniant in E. Et quoniam corpus AB supponitur inflexile, omnisque expers resistentiæ, exercebunt potentiæ AC, BD eandem vim in trahendo corpore illo, ac si traherent punctum E, cui secundùm easdem directiones sunt applicatæ. Quocirca si EG sit media directio illarum potentiarum, dum trahunt punctum E, & FG potentia ex iis composita; designabit eadem FG, tum potentiam, quam componunt, dum trahunt corpus AB, tum mediam earundem directionem: & propterea si ipsi FG æqualis, & in directum constituatur FH, potentia designata per rectam istam FH æquilibrabitur cum ipsis AC, BD.

Eâdem ratione, si potentiæ diversis corporis punctis applicatæ, illudque ad eandem partem trahentes, sint plures, quàm

duæ,

duæ, eæque convergant omnes ad unum, idemque punctum; determinabitur, tum potentia, quæ ex omnibus resultat, tum media earundem directio, considerando quoque potentias illas velut trahentes punctum, ad quod omnes convergunt. Nec dissimiliter fiet, si nequaquam ad unum, idemque punctum omnes illæ potentiæ convergant; nam poterit per diversas operationes id, quod quæritur, obtineri: nimirum primò componendo potentias duas; deinde eam, quæ ex iis resultat, cum tertiâ; tum hinc ortam cum quartâ; atque ita deinceps.

Sed unicâ tantùm operatione etiam in hoc casu licebit determinare, tum potentiam, quæ ex omnium compositione oritur, tum mediam earundem directionem: nimirum resolvendo ipsarum unamquamque in duas alias, quarum una convergat ad datum punctum, altera alicui datæ rectæ lineæ sit parallela; & componendo deinceps in unum tam convergentes ad punctum datum, quàm quæ datæ rectæ lineæ sunt parallelæ. Quod
FIG. 31. ut liquidò constet, referat rursus AB corpus aliquod inflexile, & omnis expers resistentiæ, cui ad puncta diversa applicentur quatuor potientiæ AE, CE, DE, BE, quarum unaquæque illud secum trahere conetur.

Capiatur ad alteram partem ipsius AB punctum aliquod K, quod jungatur cum pun-

punctis A, C, D, B per totidem rectas lineas AK, CK, DK, BK. Ducantur per puncta E terminos rectarum, quæ potentias designant, rectæ lineæ EF parallelæ ipsi AB, quæ cum illis conveniant in F; jamque si quælibet potentiarum AE, CE, DE, BE resolvatur in suas laterales, æquipollebunt iis octo potentiæ, quatuor quidem AF, CF DF, BF convergentes ad unum, idemque punctum K, & quatuor aliæ designatæ per rectas punctis E, & F interceptas, quæ eidem AB sunt parallelæ.

Et quoniam potentiæ AF, CF, DF, BF convergunt omnes ad punctum K, considerando eas tamquam trahentes punctum illud, facili negotio invenietur, tum media earum directio KI, tum potentia, quæ ex iisdem resultat HI. Sed potentiæ designatæ per rectas EF, quum sint omnes parallelæ, componunt simul potentiam IL, quæ agens secundùm eandem directionem est æqualis differentiæ inter IM, summam earum, quæ ab F ad E tendunt ad dextram, & ML summam illarum, quæ vicissim ab F ad E tendunt ad sinistram. Quare erit HL tum media directio potentiarum AE, CE, DE, BE, à quibus trahitur corpus AB, tum potentia, quæ in mediâ illâ directione iis omnibus æquivalet; & propterea si ipsi HL æqualis, & in directum constituatur HN, potentia de-

designata per HN æquilibrabitur, cum ipsis AE, CE, DE, BE.

Atque hinc modò si consideremus AB tamquam vectem, sive lineam inflexilem, quæ trahatur à potentiis AE, CE, DE, BE, aut etiam à potentiis AF, CF, DF, BF; fiet æquilibrium inter potentias illas, si hypomochiion ponatur in H, cui applicanda est potentia, quæ iis omnibus æquipolleat. Ex quo facile erit ostendere, quod si vectis à pluribus potentiis trahatur, nequeant eæ consistere in æquilibrio, nisi potentiæ, quæ sunt ad unam partem hypomochlii, ductæ in suas ab hypomochlio distantias, tantundem efficient, quantum potentiæ existentes ad partem alteram, ductæ similiter in suas distantias ab eodem hypomochlio.

Ponamus etenim primò, potentias, quæ vecti AB applicatæ, æquilibrantur in H, esse AF, CF, DF, BF, quarum unaquæque convergit ad punctum K. Itaque, quia HK est media directio earum potentiarum, si eædem transferantur super rectis KA, KC, KD, KB, ita ut incipientes à K terminentur punctis *a*, *c*, *d*, *b*; erit in lineâ KH commune centrum gravitatis quatuor ponderum æqualium iis in punctis existentium; adeòque per ea, quæ de communi quotcumque ponderum centro gravitatis ostensa sunt, erunt distantiæ punctorum *a*, & *c* à rectâ

KH

KH æquales distantiis punctorum d, & b ab eâdem KH.

Jam distantiæ istæ sunt inter se, ut rectangula, quæ fiunt ex ipsis in communem altitudinem KH. Quocirca, quia rectangula ista æqualia sunt iis, quæ fiunt ex rectis Ka, Kc, Kd, Kb in suas respectivè distantias à puncto H, hoc est ex potentiis AF, CF, DF, BF in perpendicula HN, HO, HP, HQ, quæ super earum directionibus protractis ex puncto H demittuntur; erunt rectangula ex potentiis AF, CF in perpendicula HN, HO super ipsis demissa ex puncto H, æqualia rectangulis, quæ fiunt ex potentiis DF, BF in perpendicula HP, HQ, quæ demittuntur super iis similiter ex puncto H: & propterea potentiæ AF, CF, ad unam hypomochlii partem existentes, ductæ in suas ab hypomochlio distantias HN, HO, tantundem efficient, quantum potentiæ DF, BF, quæ existunt ad alteram partem hypomochlii, ductæ similiter in suas distantias HP, HQ ab eodem hypomochlio.

Ponamus secundò potentias, quæ vecti AB applicatæ in æquilibrio consistunt, esse AE, CE, DE, BE, quarum unaquæque vectis longitudini perpendiculariter insistat. Capiatur ad alteram partem vectis punctum aliquod K, ex quo per puncta A, C, D, B ducantur rectæ totidem KF, cum quibus

conveniant in F rectæ lineæ EF, quæ ex extremitatibus illarum potentiarum ducuntur æquidistantes vectis longitudini. Referant autem rectæ AF, CF, DF, BF potentias totidem eidem vecti similiter applicatas, quæ quum componantur ex perpendicularibus AE, CE, DE, BE, & ex parallelis designatis per rectas EF, tantundem agent in vectem, quantum ipsæ potentiæ perpendiculares AE, CE, DE, BE; quandoquidem parallelæ designatæ per rectas EF ad motum vectis nequaquam conferunt, quum agant secundùm ipsam vectis longitudinem.

Hinc sicuti æquilibrantur inter se mutuò potentiæ perpendiculares AE, CE, DE, BE; ita quoque consistent in æquilibrio potentiæ AF, CF, DF, BF, quæ omnes convergunt ad punctum K; & propterea rectangula ex potentiis AF, CF in perpendicula HN, HO, super iis demissa ex puncto H, æqualia erunt rectangulis ex potentiis DF, BF in perpendicula HP, HQ, quæ ex eodem puncto H super iis demittuntur. Sed priora rectangula æqualia sunt iis, quæ fiunt ex potentiis perpendicularibus AE, CE in suas ab hypomochlio distantias AH, CH; posteriora verò æqualia iis, quæ fiunt ex potentiis perpendicularibus DE, BE in distantias suas DH, BH. Quare potentiæ AE, CE ad unam hypomochlii partem existentes, ductæ in di-

tantias suas ab hypomochlio AH, CH, tantundem efficient, quantum potentiæ, quæ existunt ad partem alteram, ductæ similiter in suas distantias DH, BH.

Ponamus denique potentias AF, CF, DF, BF, quæ vecti AB applicatæ consistunt in æquilibrio, nec omnes convergere ad unum idemque punctum, nec omnes vectis longitudini perpendiculariter insistere. Erigantur ex punctis A, C, D, B perpendiculares ad vectem AE, CE, DE, BE, cum quibus conveniant in E rectæ lineæ FE, quæ ex extremitatibus illarum potentiarum perpendiculariter super iis demittuntur. Et quoniam potentiæ utcumque ad vectem obliquæ AF, CF, DF, BF tantundem agunt in vectem, quantum agerent potentiæ perpendiculares AE, CE, DE, BE; existentibus iis in æquilibrio, necesse est, ut istæ etiam æquilibrentur inter se mutuò: proindeque rectangula ex potentiis AE, CE in suas ab hypomochlio distantias AH, CH æqualia erunt rectangulis, quæ fiunt ex potentiis DE, BE in distantias suas DH, BH.

Demittantur porrò super ipsis AF, CF, DF, BF ulteriùs si opus productis perpendicula HN, HO, HP, HQ. Et quoniam triangula AEF, CEF similia sunt triangulis HNA, HOC; erunt rectangula, quæ fiunt ex potentiis AE, CE in distantias suas AH, CH,

 æqua-

æqualia rectangulis, quæ fiunt ex potentiis AF, CF in perpendicula HN, HO. Atque ita quoque, quia triangula DEF, BEF similia sunt triangulis HPD, HQB; erunt rectangula ex potentiis DE, BE in suas distantias DH, BH æqualia rectangulis ex potentiis DF, BF in perpendicula HP, HQ. Unde, quum sint rectangula, quæ fiunt ex potentiis AF, CF in perpendicula HN, HO, æqualia rectangulis, quæ fiunt ex potentiis DF, BF in perpendicula HP, HQ; etiam in hoc casu potentiæ ad unam hypomochlii partem existentes, ductæ in suas ab illo distantias, tantundem efficient, quantum potentiæ, quæ existunt ad partem alteram hypomochlii, ductæ similiter in distantias suas ab eodem hypomochlio.

CAP. V.

De æquilibrio potentiarum fila, funesve trahentium, & de mediis earum directionibus.

Quæ superiori capite ostensa sunt de potentiis trahentibus corpora inflexibilia, principia nobis suppetunt uberrima ad eum quoque casum expendendum, quum corpora, quæ trahuntur à potentiis, flexibilia sunt, cujusmodi sunt fila, vel funes. Sit

Sit itaque filum ABC, perfectè quidem flexile in omnibus suis partibus, non verò extensibile, idemque terminis suis A, & C duobus clavis affigatur. Applicetur alicui ejus puncto B potentia designata per rectam BD, per quam filum flectatur in angulum rectilineum ABC; sitque potentia ista BD talis, ut si tantillum augeatur, illicò filum disrumpat, ac dilaceret. FIG. 32.

Jam, quod potentiæ BD filum dilacerare conanti opponitur, & reluctatur, sunt firmitates portionum fili BA, BC. Quocirca, quia potentia BD talis supponitur, ut tantillum adaucta filum disrumpat; considerando punctum B veluti tractum à tribus potentiis BA, BC, BD, in æquilibrio consistentibus; erit ex ostensis in præcedenti capite unaquæque illarum, ut sinus anguli sub aliarum directionibus contenti; & propterea firmitas fili BA erit ad firmitatem fili BC, ut est sinus anguli CBD ad sinum anguli ABD. Ex quo colligi potest, eandem in utrâque portione fili firmitatem reperiri, quotiescumque æquales sunt anguli ABD, CBD, vel quod idem est quotiescumque angulus ABC, in quem flectitur filum à potentiâ BD, bifariam ab ejus directione dividitur.

Ponamus modò filum ABC, extremitatibus suis duobus clavis infixum, trahi à dua- FIG. 33.

bus potentiis BD, EF, quæ consistant in æquilibrio, ita ut per earum actionem filum non modò disrumpi non possit, sed nec etiam mutari ab eo situ, quem semel acquisivit. Et quoniam ratione æquilibrii portio fili BE considerari potest velut linea inflexilis, quæ trahatur à duabus potentiis BD, EF; invenietur media directio harum potentiarum, producendo ipsarum directiones, usque donec conveniant in puncto G, & considerando eas velut trahentes punctum istud. Ex quo fit, ut media directio potentiarum BD, EF transire debeat per punctum G.

Sed nihil obstat, quominus eandem fili portionem BE consideremus, velut lineam inflexilem, quæ trahatur à duabus potentiis secundùm lineas BA, EC: nimirum si illam respiciamus, velut potionem fili DBEF, quod extremitatibus suis D &, F duobus clavis affixum flectatur in eum, quem retinet, situm per duas potentias, secundùm lineas illas agentes. Quocirca, quia productis earum potentiarum directionibus, usque donec conveniant in H, potentiæ illæ perinde trahunt lineam BE, ac si traherent punctum H; transibit per punctum istud illarum media directio.

Et quoniam potentiis BD, EF trahentibus filum ABEC resistunt duæ aliæ potentiæ agentes per rectas BA, EC; erit istarum media di-

directio omnino contraria directioni mediæ illarum : proindeque, quia media directio potentiarum BD, EF transit per punctum G, & media directio potentiarum agentium per rectas BA, EC transit per punctum H; erit GH media directio tam illarum, quàm istarum potentiarum. Unde colligi potest, quod si filum ABEC, extremitatibus suis duobus clavis affixum, trahatur à duabus potentiis BD, EF, quæ consistant in æquilibrio, media directio harum potentiarum sit diagonalis trapetii, quod mutuâ ipsarum interfectione constituunt quatuor rectæ lineæ productæ BA, BD, EF, EC.

Sed quam rationem habeant inter se firmitates portionum fili AB, BE, EC, facile erit invenire. Nimirum, quia fili portiones AB, BE in eodem statu manent, si filum clavo affigatur puncto E, & auferatur potentia EF; considerari poterit filum ABE veluti tractum à solâ potentiâ BD: proindeque firmitas portionis AB erit ad firmitatem portionis BE, ut est sinus anguli DBE ad sinum anguli DBA. Atque ita quoque, quia portiones fili BE, EC eundem situm retinent, si filum clavo affigatur puncto B, & auferatur potentia BD; considerari poterit filum BEC veluti tractum à solâ potentiâ EF; adeòque firmitas portionis BE erit ad firmitatem por-

tionis EC,ut ſinus anguli CEF ad ſinum anguli BEF. Ex quo patet, eandem eſſe in ſingulis fili portionibus firmitatem; quotieſcumque anguli ABE, BEC bifariam dividuntur ab ipſis BD, EF.

Verùm id, quum contingit, ſecabitur quoque angulus AHC bifariam per mediam directionem GH. Nam ductâ per punctum H rectâ lineâ MN parallelâ ipſi BE, quæ conveniat cum directionibus potentiarum in punctis M, & N; erit angulus AHN æqualis angulo ABE, & angulus GMH æqualis angulo GBE; proindeque quemadmodum angulus ABE duplus eſt anguli GBE, ita quoque erit angulus AHN duplus anguli GMH. Jam verò angulus AHN, tamquam exterior, eſt æqualis duobus interioribus, & oppoſitis GMH, HBM. Quare erit angulus GMH æqualis angulo HBM, & conſequenter ſubtendentia latera BH, MH æqualia erunt.

Eâdem ratione oſtendemus, æqualia etiam eſſe latera NH, EH: proindeque erit ut MH ad NH, ita BH ad EH. Sed propter parallelas BE, MN, MH eſt ad NH, ut BK ad EK. Quare erit ex æquali, ut BK ad EK, ita BH ad EH; & propterea, quia in triangulo BHE recta linea HK dividit baſim BE in ratione laterum BH, EH, eadem, per tertiam ſexti elementorum, ſecabit quoq; bifariam angu-

lum

lum BHE. Unde patet, quod quotiescumque directiones potentiarum BD, EF bisecant angulos, in quos filum flectitur, media ipsarum directio inveniri possit, secando bifariam angulum, quem mutuo occursu constituunt portiones fili AB, CE.

Ponamus porrò filum ABC, affixum extremitatibus suis B, & C duobus clavis, trahi à tribus potentiis BD, EF, GH, quæ consistant in æquilibrio. Et jam si considemus tantùm portionem ABEG, quæ trahitur à duabus potentiis BD, EF; erit per paulò ante ostensa media directio harum duarum potentiarum recta KI, quæ est diagonalis trapetii BIEK; adeòque loco fili ABEG, quod trahitur à duabus potentiis secundùm rectas BD, EF, substitui poterit filum AIG, quod trahatur ab unâ solâ potentiâ iis æquipollente secundùm directionem KI. Est autem media directio hujus potentiæ, & tertiæ GH recta MN, quæ est diagonalis trapetii IMGN. Quare erit eadem MN media directio trium potentiarum BD, EF, GH, à quibus trahitur filum totum ABEGC. FIG. 34.

Jam quotcumque fuerint potentiæ filum trahentes, perspicuum est, hoc artificio semper reperiri posse mediam earum directionem; adeòque poni potest, velut theorema generale, quod si filum aliquod, extremitatibus suis duobus clavis affixum, trahatur

tur à quotcumque potentiis, media directio illarum potentiarum transeat semper per punctum illud, in quo conveniunt extremæ fili portiones. Unde si numerus potentiarum augeatur in infinitum, ita ut tensæ fili portiones fiant indefinitè parvæ, atque adeò
FIG.35. filum ipsum flectatur in curvam ABC; media directio omnium earum potentiarum transibit per punctum D, in quo conveniunt rectæ lineæ AD, CD, quæ curvam illam contingunt in duobus punctis A, & C.

Ex eo autem, quod media directio poten-
FIG.34. tiarum BD, EF, GH trahentium filum ABEGC transeat per punctum M, in quo conveniunt productæ extremæ fili portiones AB, CG; liquet potentias illas perinde trahere filum ABEGC, ac si applicatæ omnes secundùm easdem directiones uni, eidemque puncto M traherent filum AMC. Unde si MO, MP, MQ sint rectæ totidem ipsis BD, EF, GH respectivè æquales, & parallelæ; eadem media directio transibit quoque per punctum R, commune centrum gravitatis totidem ponderum æqualium, quæ existant in punctis O, P, Q; atque adeò omnes illæ potentiæ simul secundùm directiones suas tantundem agent in filum, quantùm secundùm directionem mediam ageret potentia designata per rectam MR toties sumptam, quotus est numerus ponderum, sive potentiarum.

Sed

Sed perinde ac, quum à duabus tantùm potentiis filum trahebatur, ostendetur, firmitatem portionis fili AB esse ad firmitatem portionis BE, ut est sinus anguli DBE ad sinum anguli DBA; pariterque firmitatem portionis BE esse ad firmitatem portionis EG, ut est sinus anguli FEG ad sinum anguli FEB; atque ita quoque firmitatem portionis EG esse ad firmitatem portionis GC, ut est sinus anguli CGH ad sinum anguli EGH. Unde hìc quoque eadem in singulis fili portionibus firmitas erit, quotiescumque unaquæque potentia dividit bifariam angulum, quem constituunt partiones, quæ ab ipsâ trahuntur. Et par est ratio, quum multò plures sunt potentiæ, à quibus trahitur filum.

Id verò, quum contingit, secabitur quoque per mediam directionem MN bifariam angulus AMC, quem extremæ fili portiones AB, CG mutuo occursu constituunt. Nam semper ac potentiæ duæ BD, EF dividunt bifariam angulos ABE, BEG, in quos flectunt filum ABEG; necesse est, ut secetur quoq; bifariam per mediam directionem earum potentiarum KI angulus AIG. Unde, quia MN est media directio duarum potentiarum, trahentium filum AIGC tali lege, ut unaquæque dividat bifariam angulum, in quem ipsa filum flectit; secabitur etiam bifa-

fariam per ipsam MN angulus AMC. Nec dissimilis erit demonstratio, si numerus potentiarum filum trahentium fuerit multò major.

Quocirca sicuti in hac re theorema est generale, quod media directio quotcumque potentiarum, filum subinde trahentium, ut consistant in æquilibrio, transeat per punctum, in quo sibi mutuò occurrunt fili portiones extremæ; ita etiam velut theorema generale statui debet, quod eadem in singulis fili portionibus firmitas adsit, quotiescumque quælibet potentia dividit bifariam angulum, in quem ipsa filum flectit, quodque, quum id contingit, media directio omnium potentiarum dividat quoque bifariam angulum, quem extremæ fili portiones productæ constituunt.

Quod si potentiarum numerus augeatur in infinitum, ita ut unumquodque fili elementum, sive portio indefinitè parva à suâ potentiâ trahatur; tunc filum flectetur in curvam ABC, & media directio potentiarum
FIG. 35. omnium, ut jam monuimus, transibit per punctum D, in quo sibi mutuò occurrunt rectæ lineæ AD, CD, tangentes curvam illam in punctis A, & C. Sed in hoc casu erit eadem firmitas in singulis figuræ elementis, si cujusque potentiæ directio secet ad rectos angulos curvam ABC: quod quidem quum con-

contingit, invenietur media directio potentiarum omnium, secando angulum ADC bifariam per rectam lineam DK, ita ut AK sit ad CK, veluti est tangens AD ad tangentem CD.

Sed quomodocumque ad curvam ABC innumeræ illæ potentiæ sint applicatæ, quia omnium media directio transit per punctum D, perinde erit, ac si eædem illæ potentiæ secundùm easdem dirctiones applicentur ad punctum istud. Ex quo colligi potest id, quod iis omnibus opponitur, & reluctatur, esse tantùm firmitates earum fili portionum, quæ cum tangentibus AD, CD jacent in directum, hoc est firmitates, quas filum habet in punctis A, & C. Unde si hujusmodi firmitates datæ sint, facile erit definire tum mediam directionem potentiarum omnium, tum potentiam, quæ in hac mediâ directione iis omnibus æquivalet.

Capiantur enim super tangentibus AD, CD portiones DE, DF, quæ referant firmitates fili in punctis A, & C; tum secetur recta EF bifariam in puncto G, & junctâ DG fiat DH dupla ipsius DG, ita ut DH sit diagonalis parallelogrammi, cujus latera sunt rectæ DE, DF. Dico rectam istam DG, sive DH esse mediam directionem omnium potentiarum curvæ ABC applicatarum; & potentiam, quæ in hac mediâ directione iis

omni-

omnibus æquivalet, esse ad firmitatem fili in A, vel C, ut est DH ad DE, vel DF.

Firmitates namque fili in punctis A, & C resistunt potentiis omnibus curvæ applicatis, quia tamquam duæ aliæ potentiæ trahunt ad partem contrariam punctum D, per quod trãsit media directio illarum. Unde quũ eædem firmitates designentur per rectas DE, DF; erit recta DG ipsarum media directio, ejusque duplum DH exponet firmitatem mediam, hoc est eam, quæ in hac mediâ directione iis æquivalet. Sed ad servandum æquilibrium; potentiarum agentium, & resistentium eadem esse debet media directio; eademque potentia, quæ ex earum compositione oritur. Quare erit eadem recta DG media directio potentiarum omnium curvæ applicatarum, & potentia ex iis omnibus resultans erit ad firmitatem fili in A, vel C, similiter ut DH ad DE, vel DF.

Atque hinc sequens nobis subnascitur theorema, nimirum quod quomodocumque applicatæ sint potentiæ ad curvam ABC, in quam flectitur filum, media earum omnium directio DH non solùm transeat per punctum D, in quo conveniunt tangentes AD, CD, verùm etiam subinde dividat angulum ADC in duos alios ADH, CDH, ut sinus istorum angulorum sint in reciprocâ ratione firmitatum in punctis A, & C. Nam sinus anguli

ADH

ADH est ad sinum anguli DGE, sive DGF, ut EG, sive GF ad DE. Jam verò sinus anguli DGF est ad sinum anguli CDH, ut DF ad GF. Quare ex æquo perturbando sinus anguli ADH erit ad sinum anguli CDH, ut DF ad DE, hoc est, ut firmitas fili in puncto C ad firmitatem fili in puncto A.

Ex hoc autem theoremate sponte suâ sequitur, mediam directionē DH dividere angulum ADC bifariam, quotiescumque potentiæ perpendiculariter ad curvam sunt applicatæ. Nam, quum hoc contingit, eadem est firmitas in singulis fili portionibus, sive elementis; adeòque propter æquales firmitates in punctis A, & C, erunt etiam æquales sinus angulorum ADH, CDH, qui firmitatibus illis reciprocè correspondent; & consequenter, quum æquales sint anguli ADH, CDH, secabitur totus angulus ADC bifariam per mediam directionem AH.

Velum vento tumidum flectitur in curvā perinde, ac si traheretur ab infinitis potentiis perpendiculariter ad curvam illam applicatis; quum omnis actio per lineam perpendicularem ad superficiem corporis patientis debeat æstimari. Undæ Nautæ facili negotio poterunt determinare lineam, secundùm quam ventus agit in velum: nimirum ducendo ad veli extremitates, sive cogitatione, sive chordarum ope, tangentes duas,

duas, & bisecando angulum, quem mutuo occursu constituunt; quandoquidem linea bisectionis erit illa, quam quærunt.

Linteum quoque, quum à stagnante liquore flectitur in curvam, considerari potest veluti tractum ab infinitis potentiis perpendiculariter ad curvam illam applicatis. Unde media directio impressionum omnium, quas in linteum exerunt liquoris particulæ, habebitur ducendo ad lintei extremitates tangentes duas, & secando bifariam angulum sub ipsis comprehensum. Sed hoc idem in catenulâ, quæ ab utroque ejus extremo pendens, in curvam flectitur ob gravitationes suarum partium locum non habet; nam vis gravitatis agit secundùm lineas horizonti perpendiculares, nec proinde considerari potest catenula veluti tracta ab infinitis potentiis perpendiculariter ad ipsam applicatis.

Elegans hoc theorema de mediâ directione, bisecante angulum sub tangentibus comprehensũ, quotiescumq; potentiæ applicatæ sunt perpendiculariter ad curvam inter tangentes illas interceptam, viam nobis aperit ad novum illud curvarum genus, quas Celeberrimus Geometra Jacobus Bernoullius lineas mediarum directionum appellavit. Nam sicuti media directio potentiarum omnium
Fig. 36. toti curvæ ABC perpendiculariter applicatarum

rum est recta DM bisecans angulum ADC, ita media directio potentiarum, quæ applicatæ sunt ad arcum ABE, est recta FM, quæ bisecat angulum AFE. Unde lineam curvam PQM, quam omnes hujusmodi mediæ directiones contingunt, lineam mediarum directionum Vir Acutissimus vocitavit.

Patet autem curvam istam constitui per concursum duarum ex mediis illis directionibus indefinitè proximarum. Ita, si punctum E sit indefinitè proximū puncto C; erit etiam media directio DM indefinitè proxima directioni mediæ FM; atque adeò punctum M, in quo duæ istæ mediæ directiones sibi mutuò occurrunt, erit in curvâ quæsitâ. Hinc quemadmodum convexitas curvæ ABC in puncto C definitur per angulum DCF, ita convexitas curvæ PQM, quam omnes illius mediæ directiones contingunt, designabitur in puncto M per angulum DMF; & propterea accidens præcipuum lineæ mediarum directionum PQM hoc erit, ut convexitas ejus in omni loco subdupla sit convexitatis curvæ, ad quam refertur, ABC in loco correspondenti.

Huic verò consequens fit, ut recta CM, quæ puncta correspondentia utriusque curvæ conjungit, perpendicularis sit ad tangentem CD. Nam descriptis ex punctis C, & M tanquam centris arcubus FG, FH,

M pro-

propter angulum ADC biſectum per rectam DM, erit arcus FH duplus ipſius FI; adeòque, quum angulus DCF duplus ſit anguli DMF, erit ut CF ad FM, ita FG ad FH. Sed FG eſt ad FH, ut DI ad DH; & CF eſt ad FM, ut CD ad DM. Quare erit ex æquali, ut CD ad DM, ita DI ad DH: & propterea, quum duo triangula DIH, DCM ſimilia ſint, & angulus DIH ſit rectus; erit etiam rectus angulus DCM.

Hinc beneficio hujus theorematis facile erit, puncta ſingula invenire lineæ mediarum directionum PQM. Ita ſi inveniendum ſit punctum, quod in curvâ ABC correſpondeat puncto C, ductis tangentibus AD, CD, biſectoque angulo ADC bifariam per rectam DM, ſatis erit ex puncto C ſuper tangente CD erigere perpendicularem CM; quandoquidem punctum M, in quo perpendicularis iſta ſecat rectam FM, illud erit, quod quæritur. Unde ſi curva ABC fuerit circumferentia circuli, linea mediarum directionum PQM in centro ejus tota coacervabitur; quum ob circuli naturam tranſeat per centrum, tam recta FM, quàm perpendicularis CM.

Acutiſſimo Jacobo Bernoullio nequaquam innotuit, mediam directionem potentiarum omnium curvæ ABC perpendiculariter applicatarum eſſe rectam DM, quæ biſecat an-

gu-

gulum ADC comprehensum sub tangentibus AD, CD. Unde ad eam determinandam adhibuit perpendicularem CM, cujus valorem per quantitates differentiales expressum exhibuit. Nam, ut videre est in Actis Lipsiensibus anni 1695, positis abscissâ AK $= x$, ordinatâ CK $= y$, & curvâ ABC $= s$, jussit, ut capiatur sẽper CM $= \frac{xds^2 + xdyds}{dx^2}$; designantibus Leibnitiano more dx differentiam abscissæ KO, sive CR; dy differentiam ordinatæ NR; & ds differentiam curvæ CN.

Quo artificio Vir Clarissimus in hunc ejus perpendicularis valorem inciderit, nequaquam explicat. Sed notante Fratre ejus Johanne Bernoullio in Tractatu gallicè edito sub titulo *Essay d'une nouvelle Theorie de la Manœuvre des Vaisseaux*, simplicius adhuc perpendicularem illam exprimere potuisset, nimirum faciendo eam æqualem $\frac{xds}{ds - dy}$; quandoquidem, propter triangulum rectangulum CNR, habetur $dx^2 = ds^2 - dy^2$; adeòque erit $\frac{xds^2 + xdyds}{dx^2} = \frac{xds^2 + xdyds}{ds^2 - dy^2}$, $= \frac{xds}{ds - dy}$, si tam numerator, quàm deno-

minator dividatur per $ds + dy$.

Ex eo autem, quod recta DM bisecet angulum ADC, facile nobis erit perpendicularis CM valorem illum invenire. Nam propter parallelas AD, CK, & propter angulos æquales ADM, CDM, æquales erunt rectæ CD, CS; quare si ad tangentem CD perpendicularis demittatur ST, erit quoque ST æqualis abscissæ AK. Unde, quum propter triangula similia NCR, CST, inveniatur CS, sive CD $= \frac{xds}{dx}$, & CT $= \frac{xdy}{dx}$; fiet DT $= \frac{xds - xdy}{dx}$, & consequenter propter similitudinem triangulorum DTS, DCM invenietur CM $= \frac{xds}{ds - dy}$.

C A P. VI.

De curvis, in quas flectuntur corpora flexibilia per infinitas potentias perpendiculariter iis applicatas.

Quum filo, funi, aut alteri cuilibet corpori flexibili infinitæ potentiæ applicantur, necesse est, ut illud flectatur in curvam aliquam lineam, ubique cur-

curvaturæ continuæ, nec ullis angulis interruptam; quia unumquodque ejus elementum suam habet potentiam, à qua trahitur. Hinc circa corpora flexibilia, quæ per infinitas potentias iis applicatas flectuntur in curvam, non modò illud quæri potest, quæ sit media directio omnium illarum potentiarum, quæve potentia ex omnium compositione resultans; verùm etiam quæ sit natura illius curvæ, in quam ipsa corpora flectuntur.

Et quidem ad corpus aliquod flexibile nō aliâ ferè ratione applicari possunt infinitæ potentiæ, quàm faciendo ut illud comprimatur per actionem alicujus fluidi, vel in ejus superficiem illabentis, vel etiam stagnantis intra eam. Unde naturam curvarum definituri, in quas flectuntur corpora flexibilia per infinitas potentias iis applicatas, non alium casum expendemus, quàm quum potentiæ perpendiculariter ad curvas illas sunt applicatæ, atq; adeò eadem est firmitas in singulis elementis corporum flexibilium; quandoquidem omnis actio, sive compressio per lineam perpendicularem ad superficiem corporis patientis debet æstimari.

Ut autem in hac re viam nobis aperiamus, quæ sensim ad id, quod quærimus, nos manuducat; concipiamus rursus filum

FIG. 33. ABEC, quod extremitatibus suis affixum duobus clavis trahatur à duabus potentiis BD, EF in æquilibrio consistentibus. Itaque quia potentiæ BD resistunt firmitates portionum fili AB, BE; erit ut potentia BD ad firmitatem ipsius AB, ita sinus anguli ABE, sive ABL ad sinum anguli DBE. Atque ita quoq; quia potentiæ EF resistunt firmitates portionum fili BE, EC, erit ut potentia EF ad firmitatem ipsius BE, ita sinus anguli BEC, sive BEH ad sinum anguli FEC. Ex quo sequitur potentiam BD ad potentiam EF rationem habere compositam ex firmitate portionis AB ad firmitatem portionis BE, ex sinu anguli ABL ad sinum anguli BEH, & ex sinu anguli FEC ad sinum anguli DBE.

Hinc siquidem ponamus, potentias BD, EF bisecare angulos ABE, BEC, in quos flectitur filum ABEC; eadem erit firmita, sive vis resistendi in singulis fili portionibus: adeòque, quia ratio, quam habet firmitas portionis AB ad firmitatem portionis BE, est ratio æqualitatis; habebit potentia BD ad potentiam EF rationem compositam ex sinu anguli ABL ad sinum anguli BEH, & ex sinu anguli FEC ad sinum anguli DBE. Unde si ponamus ulteriùs, rectos esse angulos DBE, FEC, ita ut sinus ipsorum habeant quoque rationem æqualitatis; fiet ut poten-

tentia BD ad potentiam EF, ita sinus anguli ABL ad sinum anguli BEH.

Concipiamus jam, portiones fili AB, BE, EC minui in infinitum, ita ut anguli ABL, BEH fiant indefinitè parvi, & ABEC fiat portio alicujus curvæ lineæ, cui perpendiculariter sint applicatæ potentiæ BD, EF. Manebit itaque adhuc, ut potentia BD ad potentiam EF, ita sinus anguli ABL ad sinum anguli BEH. Sed propter indefinitam horum angulorum parvitatem, sinus ipsorum iisdem proportione correspondent. Quare erit ex æquali, ut potentia BD ad potentiam EF, ita angulus ABL ad angulum BEH: & propterea quia angulus ABL designat convexitatem curvæ in puncto B, & angulus BEH denotat convexitatem curvæ in puncto E; erit rursus ut potentia BD ad potentiam EF, ita convexitas curvæ in puncto B ad convexitatem curvæ in puncto E.

Curvæ igitur, cui infinitæ potentiæ perpendiculariter sunt applicatæ, hoc quidem est accidens præcipuum, ut convexitas ejus in quolibet loco sit, ut potentia, quæ curvam trahit in loco illo. Atque hinc sponte suâ sequitur, curvam debere esse circularem, quotiescumque potentiæ omnes, perpendiculariter ad curvam applicatæ, inter se sunt æquales; quandoquidem inter omnes curvas sola circuli circumferentia eandem

dem ubique convexitatem habet. Unde mirari non subibit, quod ampullæ, quas Infantes ex loturâ saponis conficiunt, in rotunditatem tornentur; quia aer intus inclusus æquales in singulas earum particulas exerit pressiones; adeòque perinde est, ac si particulæ illæ per totidem potentias æquales perpendiculariter traherentur.

Eâdem autem ratione vesiculæ fibrarum muscularium, si quæ sint, quum à spiritibus animalibus, aut ab aliâ æquivalente materiâ inflantur, non aliam figuram sibi debent conciliare, quàm circularem; quandoquidem distenduntur ab iis spiritibus, qui æquali vi agunt in parietes earum vesicularum. Ex quo colligi potest, oscitanter nimis Clarissimum nostrum Borellū in Tractatu suo de motu Animalium vesiculis illis figuram rhomboidalem attribuisse; quum hujusmodi figura nequaquam conveniat cum pressione spirituum, propter quam vesiculæ distenduntur: & credibile est, hanc eis figuram rectilineam Virum summum assignasse, ut commodiori calculo supputaret relationes, quas vires dilatantes habent ad resistentias superandas.

Sed quod dicimus, vesiculas fibrarum muscularium, ob æquales spirituum, à quibus inflantur, pressiones, non esse rhom-

boi-

boidales, sed circulares; id intelligi debet, si musculus nullam haberet resistentiam superandam. Verum, quia musculus semper pondera, & resistentias, si non extrinsecus advenientes, saltem sui ipsius, & ossium, quibus alligatur, submovere debet; fit hinc, ut vesiculæ illæ non integram adipiscantur figuram circularem, sed ob resistentiam removendam nonnihil in longitudinem se distendant: non secus, ac ampulla, ex loturâ saponis confecta, ob gravitatem guttulæ, fundo ejus adhærentis, tantillum elongatur, & ex sphærâ mutatur in sphæroidem, factam ex circumvolutione segmenti circularis.

Similiter orificia vasorum, & pori glandularum nostri corporis non alias figuras, quàm circulares habebunt. Unde colligi potest secretiones fluidorum, quæ fiunt in glandulis illis, non magis feliciter per diversam pororum configurationem explicari, quàm per multiplicia illa fermenta, quæ primum apud Anatomicos obtinebant. Nam semper ac pori glandularum figuras habent circulares, ii non figuris, sed figurarum amplitudine different à se mutuò: proindeque solâ figurarum consideratione intelligi non potest, cur vascula quædam fluida nonnulla, & vascula alia fluida alterius generis excipere cogantur.

Per

Per contrarium autem, quum potentiæ ad curvam applicatæ nequaquam ſunt æquales, fieri nullo pacto poteſt, ut curva illa ſit circularis. Hinc velum vento tumidum in circuli circumferentiâ flecti non poteſt, nec item linteum, quod ſtagnante liquore intumeſcit; quia utroque caſu ſingula curvæ elementa à totidem aeris, vel liquoris filamentis premuntur quidem ad rectos angulos, ſed æquales preſſiones non ſubeunt, nec ideo ab æqualibus potentiis trahuntur. Sed cognitâ lege preſſionis, quam in curvæ elementa exerunt filamenta, ſive aerea, ſive liquoris; facile erit ex oſtenſo theoremate naturam curvæ definire, quam ſive velum, ſive linteum cogitur induere.

Nimirum oſtendemus in Hydroſtaticâ vim, qua fluida quævis materia pellit datam aliquam ſuperficiem, ad eam utcumque inclinatam, eſſe ut quadratum ſinus inclina-
FIG. 37. tionis. Itaque ſi AN ſit curva velaria, quæ excipiat ventum ſecundùm directionem axi AM parallelam; vis, qua pellitur conſtans curvæ elementum NQ, ubicumque ſumatur, erit ſemper, ut NR quadratum. Sed ex oſtenſo theoremate eadem vis eſt, ut convexitas curvæ in puncto Q. Quare ſi recta OS curvam contingat in Q, & centro Q intervallo QN deſcribatur arcus NO; quadratum ex NR ipſi NO ubique proportione correſpon-

de-

debit; adeòque id, quod oritur, dividendo NR quadratum per NO idem ubique erit.

Jam, quum NR sit infinitesima primi generis, erit NR quadratum infinitesima generis secundi. Unde quum etiam NO sit infinitesima secundi generis; per ea, quæ à nobis ostensa sunt de calculo infinitesimarum in priori nostræ Algebræ libro, NR quadratum divisum per NO dabit quotientem finitum. Designet itaque recta AB, axi AM perpendicularis, quotientem istum, & ex termino ejus B ducantur rectæ BC, BD æquidistantes rectis NT, QS, quæ curvam contingunt in punctis N, & Q; describaturque centro B intervallo BD arcus DE.

Et quoniam AB est quotiens, qui oritur, dividendo NR quadratum per NO; erit ut NO ad NR, ita NR ad AB: proindeque NR ad AB rationem habebit compositam ex NO ad NQ, & ex NQ ad NR. Jam verò propter sectores similes NQO, BDE, NO est ad NQ, ut DE ad BD, sive BC; itemque, propter triangula similia NQR, BCA, NQ est ad NR, ut BC ad AB. Quare ex æquali NR erit ad AB in ratione compositâ ex DE ad BC, & ex BC ad AB, sive etiam in ratione simplici DE ad AB; adeòque erit NR æqualis ipsi DE.

Hinc, quum similia sint triangula NQR, DCE, erit non modò NR æqualis DE, verùm

rùm etiam NQ æqualis CD, & QR æqualis CE: proindeque, quum eadem sit demonstratio in omni loco, erit tum summa omnium NQ æqualis summæ omnium CD, tum summa omnium QR æqualis summæ omnium CE: & idcircò si centro B, & intervallo BA describatur arcus AF, qui secet rectam BC in puncto F, erit curva tota AN æqualis rectæ AC, & abscissa AM æqualis portioni per arcum abscissæ CF.

Unde modò præcipuæ hujus curvæ proprietates prono alveo fluunt. Patet etenim primò rectam AB, quam velut constantem parametrum ejus dicere licebit, esse ad quamlibet curvæ portionem AN, ut est ordinata correspondens MN ad subtangentem MT. Nam, propter triangula similia MNT, ABC, AB est ad AC, ut MN ad MT. Ostensum est autem, arcum curvæ AN æqualem esse rectæ AC. Quare erit quoque ut parameter AB ad arcum curvæ AN, ita ordinata correspondens MN ad subtangentem MT.

Patet secundò, quod si capiatur AH æqualis AB, & compleatur rectangulum MK, spatium exterius AHKN æquale sit rectangulo, quod fit ex parametro AB in arcum curvæ AN. Est enim AM æqualis CF: quare, quum AH sit æqualis AB sive BF, erit tota MH, sive NK æqualis BC; & propterea

ob

ob æquales NR, DE, erit ſpatiolum KNQI duplum exigui trianguli BCD; atque ita, quum ſpatium totum AHKN duplum fiat totius trianguli ABC, erit idem æquale rectangulo ex AB in AC, hoc eſt ex parametro in arcum curvæ AN.

Patet demum, quod ſi centro H, & vertice A deſcribatur hyperbola æquilatera AP, quilibet curvæ arcus AN æqualis ſit ordinatæ in hyperbolâ correſpondenti MP. Nam propter proprietatem hyperbolæ MH, ſive BC quadratum eſt æquale quadrato ex AH, ſive AB unà cum quadrato ex MP. Sed ob triangulum rectangulum BAC, idem BC quadratum eſt æquale quadratis, quæ fiunt ex AB, & AC. Quare erit AC æqualis MP, hoc eſt arcus curvæ AN æqualis ordinatæ hyperbolæ MP.

Atque hæ quidem ſunt palmariæ curvæ velariæ proprietates, ex quibus nullo negotio deducuntur æquationes duæ differentiales, in quas inciderunt Clariſſimi Bernoullii Fratres. Nam ſi ponatur parameter AB $= a$, abſciſſa AM $= x$, & ordinata MN $= y$; erit QR $= dx$, NR $= dy$, & arcus curvæ AN $= \sqrt{2ax + xx}$. Unde, quum AB ſit ad AN, ut MN ad MT, ſive etiam ut NR ad QR; erit ut a ad $\sqrt{2ax + xx}$, ita dy ad dx: proindeque erit $dy\sqrt{2ax + xx} = adx$, quæ eſt

est prima æquatio differentialis. Sed si abscissæ sumantur à centro hyperbolæ H, ponaturque HM $= x$; fiet arcus curvæ AN $= \sqrt{xx - aa}$; atque adeò invenietur $dy\sqrt{xx - aa} = adx$, quæ est æquatio differentialis altera.

Circa curvam velariam illud quoque ab iisdem Fratribus est observatum, nimirum quod ea sit ejusdem naturæ cum catenariâ, hoc est cum curvâ, in quam flectitur proprio pondere catenula, ab utroque ejus extremo pendens: quamquam notabile intersit discrimen inter actionem venti in velariâ, & actionem gravitatis in catenariâ; quum in illâ impressiones fiant secundùm lineas perpendiculares curvæ elementis, ob generalem legem pressionis, quod æstimari debeat secundùm lineam perpendicularem superficiei corporis patientis; in istâ verò secundùm directiones perpendiculares ad horizontem, ob naturam gravitatis, quæ in hunc modum operatur.

Itaque, ut hæc inter utramq; curvam identitas Lectoribus nostris innotescat, sit NAO
Fig. 38. curva catenaria, cujus punctum infimum sit A, & axis recta AM. Et quoniam nec curvatura arcus AN, nec vires, quibus ejus elementa singula pelluntur deorsum, ullam patiuntur mutationem, si auferatur portio catenulæ AO, & reliquæ AN extremitas figatur in A; transibit per ostensa in superiori

ri capite media directio omnium illarum virium per punctum C, in quo conveniunt tangentes AB, NT; eæque tantundem agent adversùs firmitates catenulæ in punctis A, & N, quantum si omnes simul secundùm easdem directiones applicatæ essent puncto C.

Et quoniam vires, quibus pelluntur elementa singula curvæ AN, sunt propriæ ipsorum gravitationes; applicando eas propriis directionibus puncto C, perinde erit, ac si exinde suspendatur pondus P, tantundem gravitans, quantum catenula tota AN. Sed firmitas catenulæ in A est ad pondus P, ut sinus anguli NCP, sive PCT, aut CTM ad sinum anguli ACN, sive CNM. Quare erit quoque, ut sinus anguli CTM ad sinum anguli CNM, hoc est, ut MN ad MT, ita firmitas catenulæ in A ad pondus totius catenulæ AN. Unde designando firmitatem catenulæ in A, utpote constantem, per rectam magnitudine datam AB, & pondus totius catenulæ AN per curvam ipsam AN, cujus longitudini proportione semper corespondet; erit ut ordinata MN ad subtangentem MT, ita recta AB ad curvam AN, quæ est proprietas potissima curvæ velariæ.

Patet autem, curvam catenariam eandem esse cum curvâ velariâ in hypothesi, quod catenula sit gravitatis uniformis, ita ut æqualia ejus elementa æqualiter gravitent; adeò-

adeòque pondus cujuſque portionis per longitudinem ejuſdem poſſit deſignari. Sed res longè aliter erit, ſi catenula fuerit gravitatis difformis. Tunc enim curva catenaria alia, atque alia erit, prout diverſimodè portiones ejus difformiter graves ſupponuntur. Et ſpeciatim erit parabola, ſi pondus cujuſque portionis per ordinatam correſpondentem poſſit deſignari; quandoquidem erit in hoc caſu, ut AB ad MN, ita MN ad MT; adeòque quadratum ordinatæ MN æquale erit rectangulo ex rectâ conſtante AB in ſubtangentem MT: quæ proprietas inter curvas omnes nonniſi parabolæ competit.

Patet quoque identitatem inter velariam, & catenariam obtinere in hypotheſi, quod directiones gravium ſint parallelæ. Sed ſiquidem convergant omnes ad datum punctum F, tunc catenaria erit hyperbola, habens punctum illud F pro umbilico exteriore. Nam in iſto caſu media directio virium, quibus pelluntur deorſum elementa ſingula curvæ AN, tranſibit non modò per punctum C, in quo conveniunt tangentes AB, NT, verùm etiam per punctum F, ad quod directiones earum virium convergunt. Unde quia omnes illæ vires, applicatæ ſecundùm proprias directiones ad punctum F, continentur intra angulum AFN, & velut æquales terminantur ad unum,

eun-

eundemque arcum descriptum ex puncto F tamquam centro ; eadem media directio illarum virium bisecabit angulum AFN, quum per superius ostensa debeat quoque transire per commune centrum gravitatis totidem ponderum æqualium, existentium in extremitatibus rectarum, quæ vires illas designant. Ex quo sequitur, catenariam NAO hyperbolam esse, habentem punctum F pro umbilico exteriore ; quum ei soli relatè ad umbilicos competat hæc proprietas, ut recta, quæ ex concursu duarum tangentium ducitur ad datum punctum, bisecet angulum, quem in puncto illo constituunt rectæ lineæ ex contactuum punctis exeuntes.

Sed in hypothesi, quod gravium directiones convergant ad datum punctum F, curva catenaria erit hyperbola, habēs punctū illud pro umbilico exteriore, quotiescumque catenula est gravitatis uniformis, ita ut vires, quibus singula ejus elementa urgentur, applicatæ ad punctum F, possint tamquam æquales terminari ad unum, eundemque arcum, descriptum ex puncto F tamquam centro. Res autem secus erit, si catenula fuerit gravitatis difformis, neque adeò æquales sint vires, quibus ejus elementa singula pelluntur ; quia tunc prout diversimodè supponuntur difformiter gravia catenu-

læ elementa, ſic curva catenaria alia, atque alia orietur. Verum erit rurſus hyperbola, & quidem æquilatera, centrum habens punctum F, ſi gravitas in catenulæ elementis tali lege modificetur, ut firmitates eorundem elementorum prodeant proportionales diſtantiis ſuis à puncto F, ad quod gravium directiones convergunt.

Nam, iiſdem ſemper ſuppoſitis, firmitas catenulæ in A erit ad firmitatem catenulæ in N, ut diſtantia AF ad diſtantiam NF. Sed quum media directio virium, quibus reſiſtunt, ſit recta GCF; firmitas catenulæ in A eſt ad firmitatem catenulæ in N, ut ſinus anguli NCG, ſive FCT ad ſinum anguli ACG, ſive FCA. Quare erit ex æquali, ut AF ad NF, ita ſinus anguli FCT ad ſinum anguli FCA. Jam verò demiſſo ſuper tangente NT perpendiculo FH, & aſſumptâ CF pro radio, ſive ſinu toto, fit FH ſinus anguli FCT, & FA ſinus anguli FCA. Itaque erit rurſus ex æquali, ut AF ad NF, ita FH ad AF; & propterea AF quadratum erit æquale rectangulo NFH: id quod oſtendit, curvam AN eſſe hyperbolam æquilateram centrum habentem punctum F; quum ei ſoli inter omnes curvas competat hæc proprietas.

Sed de curvâ velariâ, & catenariâ, quæ hactenus dicta ſunt, ſufficere videntur. Tranſea-

eamus modò ad curvam, in quam flectitur inteum, stagnante aliquo liquore homogeneo compressum. Itaque sit ANC curva ista, cujus punctum supremum sit A, punctum infimum C, axis horizontalis recta AB, & axis verticalis recta BC. Ducantur ad axim BC tres ordinatæ MN, PQ, RS indefinitè proximæ, quæ abscindant ex curvâ portiones æquales NQ, QS; & productâ QS versùs O, describatur ex puncto Q tamquam centro arcus NO, ducanturque NH, OI, QK ipsi BC parallelæ; denique cōcipiatur triangulum rectangulum æquicrure BCD, cum cujus hypothenusâ BD conveniant ductæ ordinatæ in punctis E, F, G. FIG. 39.

Jam ostendemus in hydrostaticâ liquores homogeneos gravitare in vasium bases, & latera pro ratione altitudinis. Quare pressio, quam subit ab incumbente liquore constans curvæ elementum NQ, erit ut altitudo BM, sive ME. Sed ex ostenso theoremate eadem pressio est, ut convexitas curvæ in puncto Q, hoc est, ut arcus NO dato radio descriptus. Itaque BM, sive ME ipsi NO proportione correspondebit; proindeque areola PMEF ad rectangulum ONH datam rationem habebit.

Verumtamen, quia angulus ONQ rectus est, erit angulus NOI æqualis angulo NQH; adeòque ducendo per punctum N rectam li-

neam ordinatæ PQ parallelam, facile intelligetur NO esse ad HI, ut est NQ ad NH. Unde, quum rectangulum ONH æquale sit ei, quod fit ex NQ in HI; ob datam NQ, habebit rectangulum illud ONH ad HI datam rationem: & propterea data etiam erit ratio, quam habet areola PMEF ad HI, hoc est ad differentiam ipsarum QH, SK; quum, propter æquales, & in directum positas QS, QO, æquales sint etiam SK, QI.

Eâdem ratione ostendetur, quod si TV sit alia ordinata prioribus indefinitè proxima, quæ abscindat ex curvâ arcum SV, æqualem cuique ipsorum NQ, QS, & ducatur per punctum S recta linea SL parallela axi BC; areola RPFG habeat datam rationem ad differentiam ipsarum SK, VL. Quare componendo area RMEG ad differentiam ipsarum QH, VL datam quoque rationem habebit. Unde, quum eadem demonstratio continuari possit, usque donec perveniatur ad punctum supremum A, ubi VL prorsus evanescit; concludi poterit, naturam curvæ lintei ANC talem esse, ut triangulum BME, ubicumque sumatur, sit semper ut QH differentia ordinatarum MN, PQ, quæ datum ex curvâ elementum abscindunt.

Huic verò consequens est, ut siquidem in puncto infimo C idem datum curvæ elementum capiatur, ei proportione corre-

spon-

spondeat triangulum totum BCD; quandoquidem in puncto illo, propter axim BC rectos cum curvâ angulos facientem, differentia ordinatarum QH in ipsum desinit elementum. Unde, quum sit, ut QH ad NQ, ita triangulum BME ad triangulum BCD; erit quoque, ut QH ad NQ, ita BM quadratum ad BC quadratum: adeoq; positis BC = a, BM, sive WN = x, & AW = y, nullo negotio deducetur æquatio differentialis $xxdx = dy\sqrt{a^4 - x^4}$, quam Celeberrimi Bernoullii Fratres invenerunt.

In determinandâ curvâ lintei posuimus liquorem stagnantem homogeneum esse, ita ut pressiones, quas subeunt æqualia curvæ elementa NQ, QS, SV designari possent per altitudines correspondentes BM, BP, BR, sive etiam per ordinatas trianguli ME, PF, RG. Sed facile erit ad liquores etiam heterogeneos eandem determinationem extendere: nimirum si loco trianguli BCD describatur figura alia, quæ similiter ordinatis suis designet diversas pressiones, quas ab incumbente liquore subeunt correspondentia curvæ elementa; quandoquidem eidem insistentes analysi, inveniemus semper aream totam BCD esse ad aream BME, ut NQ ad QH. Unde si BCZ sit figura alia, cujus ordinatæ CZ, MX sint ut correspondentes tæ BCD, BME figuræ prioris, manentibus

bus adhuc $BC = a$, $AW = y$, & WN, sive BM $= x$, positisque insuper $CZ = b$, & $MX = p$, invenietur pro omni casu æquatio differentialis $dy \sqrt{bb - pp} = pdx$, conveniēs adamussim cum illâ, in quam laudati Fratres inciderunt in solutione problematis generali.

Curva lintei stagnante liquore homogeneo compressi, notante Jacobo Bernoullio, non differt ab eâ, in quam flectitur lamina

FIG. 40. elastica, & gravitatis expers ANC*cna*, unâ ejus extremitate C*c* alicubi ad perpendiculum firmata, dum trahitur per pondus P, quod ab altera extremitate pendens, eam usque adeò flectit, & incurvat, donec ipsa, ejusque tangens in A normalis fiat ponderis directioni AB. Id verò haud difficile erit ostendere. Nam siquidem in curvâ interiori ANC constans elementum capiatur NQ, & ex punctis N, & Q perpendiculares ad eandem curvam erigantur N*n*, Q*q*, ipsique Q*q* parallela agatur N*o*; designabit triangulum *n*N*o* tensionem laminulæ NQ*qn*, & *no* tensionem elementi *nq* curvæ exterioris. Unde, quia vis tendens portionem *nq* æquilibratur in puncto N cum pondere P laminam totam incurvante; ob legem æquilibrii vis illa tendens, quæ designari potest per tensionem ipsam *no* tamquam per suum effectum, vel etiam per

per arculum NO (quum propter triangula similia *n*N*o*, NQO, *no* sit ad NO in datâ ratione) erit ad pondus P, ut WN ad N*n*; adeòque, quia datum est pondus P, dataque est laminæ crassities N*n*, fiet ipsi NO ubique proportionis WN, sive BM: prorsus ut in curvâ lintei, stagnante liquore homogeneo compressi.

Perspicuum est autem, identitatem istam inter elasticam, & curvam lintei non aliâ de causâ habere locum, quam quia vires tendentes proportionales assumuntur ipsis tensionibus; atque adeò per eandem ordinatam WN, sive BM designatur tam vis tendens portionem *nq*, quàm tensio ipsa *no*, sive ei proportionalis arculus NO. Cæterùm si definienda sit curva elastica pro quacumque virium tendentium hypothesi; oportebit circa rectam BC describere scalam tensionum, hoc est figuram talem BCD, ut designantibus abscissis BC, BM vires tendentes, referant ordinatæ correspondentes CD, ME ipsas tensiones: non secus ac pro determinandâ curvâ lintei, quum liquor stagnans est heterogeneus, describenda est circa axem curvæ verticalem scala pressionum, quas ab incumbente liquore subeunt correspondentia curvæ elementa. Unde erit rursus curva elastica eadem cum curvâ lintei, si scala pressionum in istâ sit eadem cnm scalâ tensionum in illâ.

CAP. VII.

De resistentiâ solidorum, tam verticaliter, quàm horizontaliter suspensorum.

Constat experientiâ, machinas, quæ in parvis elaboratæ, felicem obtinent eventum, in magnis eâdem proportione constructas, non æquè feliciter effectus suos sortiri. Id communiter rejiciebatur in defectus inevitabiles artis manualis, qui sæpè sæpiùs veram, solidamque rerum theoriam apud vulgus hominum miserè dedecorant. Sed observavit Galilæus, diversitatem istam longè majorem esse, quàm quæ ex solâ istâ causâ repeti posset. Itaque aliud quidpiam adesse conjecit, ex quo illa esset differentia deducenda: id, quod dum sedulò perquisivisset, pervenit tandem ad doctrinam de resistentiâ solidorum, Physicis ante ipsum penitùs incognitam, de qua breviter quidem, sed perspicuè, hoc capite agendum nobis erit.

Corporis verticaliter suspensi partes omnes graves esse, & per istam gravitatem conari inferiores à superioribus divelli, notius est, quàm ut possit inficiari. Jam ista divulsio revera fieret, nisi ratione unionis adesset in iisdem partibus vis contraria, qua ad-

versùs eam resistunt, ac reluctantur. ıocirca in corpore sic verticaliter suspenduæ poterunt vires oppositæ considerari; a quidem, quæ dependet à gravitate suan partium, & per quam unaquæque à : contiguâ conatur separari; altera, quæ ›fluit ab unione earundem partium, æque vis resistentiæ poterit insigniri.

Hæc vis resistentiæ, non aliter definiri :est, quàm per maximum pondus, quod pus verticaliter suspensum potest sustineıbsque eo, quod fractionem patiatur. Sed, um eadem oriatur ex nexu partium infe-rum cum superioribus, habebitur quo-: quantitas ejus absoluta, multipliıdo unamquamque partem per vim, qua :onnectitur cum suâ contiguâ, & capiensummam omnium istorum productorum. de in corporibus ejusdem ubique densiis eadem vis resistentiæ proportione semcorrespondebit sectioni, in qua illam ısideramus; quandoquidem propter eann ubique densitatem vis nectens in singupartibus est eadem, & numerus partium ınexarum est, ut ipsa sectio, in qua parillæ reperiuntur.

Hinc prisma homogeneum, quod verti-iter suspensum proprio pondere non disnpitur, nec etiam adauctâ base disrumur; quandoquidem tam pondus, quàm vis

vis resistentiæ augetur in ratione basis. Sed longè secus res erit, si augeatur longitudo, quia tunc augebitur quidem pondus, sed non item vis resistentiæ. Quare prismata, ex eâdem, & homogeneâ materiâ constantia, si eandem habeant longitudinem, suspensa verticaliter erunt æquè resistentia; sed si fuerint longitudinis diversæ, debilius semper erit illud, cui major est longitudo, tametsi basim habeat longè majorem.

Jam ut maxima longitudo inveniatur, in quam prisma aliquod ejusdem ubique densitatis distendi possit absque eo, quod verticaliter suspensũ proprio pondere frangi queat; satis erit maximum pondus invenire, quod prisma illud sic verticaliter suspensum potest sustinere absque eo, quod per actionem ejus ponderis disrumpi possit. Nam si prisma eousque deinde protrahatur, donec pars adjecta tantundem gravitet, quantum maximum illud pondus; hæc erit maxima longitudo quæsita. Atque hoc artificio detexit Galilæus, maximam longitudinem, quam cylindrus ex ære habere potest absque eo, quod verticaliter suspensus proprio pondere frangi possit, esse brachiorum 4801.

Ex dictis illud etiam colligi potest, quod prisma homogeneum verticaliter suspensum nequeat esse æqualis resistentiæ per totam

sui

i longitudinem; nam etsi sectio horizontalis, per quam definitur resistentiæ vis soluta, eadem sit in omni loco, attamen ondus infra sectionem existens non est idem bique. Interim si prisma consideretur veiti expers omnis gravitatis, & ejus extreitati appendatur pondus, quod illud ahendo disrumpere conetur; tunc ubique rit æquè resistens, quia hoc casu idem est ondus, quod infra quamlibet sectionem xistit. Patetque, præter prismata, nulla lia solida dari posse, quæ considerata tamquam gravitatis expertia sint ubique æquais resistentiæ.

Generaliter autem, grave solidum homogeneum, verticaliter suspensum, erit ubique æquè resistens, si sectio horizontalis ubicumque facta sit semper, ut portio solidi, quæ infra sectionem existit. Hinc si ABC sit curva logarithmica, & DE ejus asymptotus; solidum, quod describitur per revolutionem spatii indefiniti (sive potiùs infinitæ longitudinis) ADEC circa asymptotum DE, suspensum verticaliter erit æqualis ubique resistentiæ. Nam ductâ OQ, quæ logarithmicam alicubi contingat in B, & demissâ ad asymptotum ordinatâ BF; inter alias proprietates logarithmicæ, quas recensuit Christianus Hugenius in calce suæ diatribæ de causâ gravitatis, una est, FIG. 41.

quod

quod solidum descriptum per revolutionem spatii infiniti BCEF sit in datâ ratione cum cono descripto per revolutionem trianguli BOF, nimirum in ratione sesquialterâ. Unde, quia conus iste, propter subtagentem OF, constantem in logarithmicâ, est ut basis ipsius; erit idem solidum descriptum per revolutionem spatii infiniti BCEF, ut circulus, qui describitur per ordinatam BF.

Itaque vis resistentiæ in corpore homogeneo verticaliter suspenso æstimari debet in omni loco per sectionem horizontalem factam in loco illo. Sed non perinde res erit, si idem corpus parieti horizontaliter sit affixum. Tunc enim tam pondus, quàm vis resistentiæ aliâ ratione agunt in se mutuò, nimirum vecte velut interjecto. Nam si pa-
Fig. 42. rieti PQ horizontaliter affigatur corpus aliquod AE, quod proprio pondere propè parietem disrumpatur, fiet omnis motus super rectâ horizontali AC tamquam hypomochlio. Quocirca si sectionis verticalis ABC resistentia tota concipiatur veluti collecta, & coacervata in puncto H, quemadmodum tota gravitas corporis AE unita concipitur in centro suæ gravitatis G; demissis verticalibus GM, HN, erit HN radius vectis, cui applicata est resistentia, & MN radius vectis, cui applicatum est pondus.

Jam

Jam quotiescumque corpus AE est ejusdem ubique densitatis, partes sectionis ABC connectuntur eâdem vi cum partibus superficiei contiguæ; adeòque, quia vis resistentiæ, quæ oritur ex nexu illo, spargitur per sectionem ABC eâdem omnino ratione, quâ diffunditur per partes ejus vis gravitatis, erit punctum H, in quo colligitur tota resistentia, idem omnino cum centro gravitatis ipsius sectionis. Ex quo patet, in corporibus homogeneis horizontaliter suspensis momentum resistentiæ in omni loco definiendum esse, non per sectionem verticalem factam in loco illo simpliciter, sed per eam ductam in distantiam centri suæ gravitatis ab hypomochlio; atque ita quoque momentum ponderis, cum quo reluctatur resistentia, definiendum esse non per pondus ipsum simpliciter, sed per illud ductum in distantiam sui centri à plano sectionis.

Hinc in prismate homogeneo, parieti horizontaliter affixo, momentum resistentiæ æstimari poterit per basim ductam in prismatis altitudinem, momentum verò ponderis per factum ex pondere in longitudinem prismatis. Unde cylindrus, exempli gratiâ, ex ære, qui unâ sui extremitate verticaliter suspensus frangi non potest, nisi longitudinem habeat paulò majorem, quàm brachiorum 4801, affixus dein-

deinde horizontaliter parieti, frangetur longitudine longè minori; quandoquidem in hoc casu major longitudo dupliciter confert ad cylindri fracturam, primò quia auget pondus cylindri, & secundò, quia longius reddit brachium vectis, cui pondus illud concipitur applicatum.

Ponamus jam in prismate homogeneo horizontaliter suspenso momentum resistentiæ æquari cum momento ponderis. Erit igitur vis resistentiæ absoluta, quæ per basim prismatis definitur, ad pondus prismatis absolutum, ut longitudo ad altitudinem. Sed vis resistentiæ absoluta definitur quoque per maximum pondus, quod prisma verticaliter suspensum potest sustinere. Itaque maximum pondus, quod sustinere potest prisma in suspensione verticali, erit ad maximum pondus, quod sustinet in suspensione horizontali, ut longitudo ad altitudinem; & propterea si longitudo dupla fuerit altitudinis, maximum pondus, quod sustinet in suspensione horizontali, dimidium erit ejus, quod sustineret in suspensione verticali.

Idem obtinet quoque, si prisma suspensum horizontaliter concipiatur omnis expers gravitatis, & ex medio pendeat tale pondus, ut illud disrumpat tantillum adauctum; nam semper maximum pondus, quod sustinere potest prisma in suspensione ver-

rticali, erit ad maximum istud pondus, od sustinet in suspensione horizontali, ut ngitudo ad altitudinem. Sed si pondus spendatur ex extremitate prismatis, tunc itudo sumenda est dimidiata, vel etiam plicanda est longitudo; quandoquidem dius vectis, cui pondus concipitur applitum, est tota prismatis longitudo.

Corpus horizontaliter suspensum erit qualis ubique resistentiæ, si in qualibet ctione verticali momentum resistentiæ dam servet rationem cum momento ponders correspondentis. Hinc prisma homogeeum basi suâ parieti horizontaliter affixum er totam sui longitudinem non potest esse què resistens; nam momentum resistentiæ n omni sectione verticali manet idem, & mmutatum, sed non item momentum ponleris, cum quo resistentia reluctatur, quippe quod in recessu à pariete minuitur tum atione ipsius ponderis, tum etiam ratione brachii vectis, cui concipitur pondus applicatum.

Sed neque etiam erit æquè resistens, si concipiatur omnis expers gravitatis, & ex extremitate ejus pendeat pondus aliquod, quod illud trahendo disrumpere conetur. Nam etsi in omni sectione verticali vis resistentiæ cum eodem semper pondere reluctetur, attamen ob brachium vectis, cui pon-

dus

dus concipitur applicatum, momentum illius ponderis decrescit per prismatis longitudinem in ipsâ longitudinis ratione; nec proinde eandem ubique rationem servat cum momento resistentiæ, quod propter æqualem prismatis crassitiem manet in omni sectione idem, & immutatum.

Possunt autem plura solida reperiri, quæ considerata velut gravitatis expertia sint æqualis ubique resistentiæ, quum horizontaliter suspensa pondus sustinent ab eorum extremitate pendens. Hujusmodi est cuneus
FIG. 43. rectilineus ABCDEF dorso suo parieti affixus; cujus facies triangulares ADE, BCF horizontem respiciunt. Nam si aliquo in loco fiat sectio verticalis GHIK, cujus centrum grvitatis sit L; ex ostensis momentum resistentiæ in loco illo erit, ut sectio ipsa GHIK ducta per altitudinem ML, adeòque, quia sectio GHIK est parallelogrammum datæ altitudinis, cujus semissis est ML; erit idem momentum resistentiæ, ut sola basis parallelogrammi GK, quæ datam servat rationem cum ME. Sed momentum ponderis, quod pendet ex cunei extremitate, est ut brachium vectis ME, cui concipitur pondus applicatum. Itaque momentum resistentiæ in sectione GHIK datam servat rationem cum momento ponderis; & propterea, quum eadem

sit

: demonstratio in omni aliâ sectione, erit
uneus rectilineus ABCDEF æqualis ubi-
ue resistentiæ.

Hujusmodi est etiam cuneus parabolicus .BCDEF ejusdem ubique crassitiei, in quo .F, sive DE est axis parabolæ BF, sive CE. Nam si aliquo in loco fiat sectio verticalis GHIK, cujus centrum gravitatis sit L; erit momentum resistentiæ in loco illo, ut sectio ipsa GHIK, multiplicata per altitudinem ML: adeòque, quia sectio GHIK est parallelogrammum, cujus basis est data; erit idem momentum resistentiæ, ut rectangulum NML, sive etiam ut MN quadratum, quod ob naturam parabolæ datam servat rationem cum MO. Sed momentum ponderis, quod ex cunei extremitate pendet, est ut brachium vectis MO, cui concipitur pondus applicatum. Quare momentum resistentiæ in sectione GHIK erit in datâ ratione cum momento ponderis; adeòque, quum eadem sit demonstratio in omni aliâ sectione, erit cuneus parabolicus ABCDEF æqalis ubique resistentiæ. Fig. 44.

Tale quoque est solidum ABC, ortum ex revolutione primæ parabolæ cubicæ CA circa axem suum CD, cujus ea est natura, ut cubi ordinatarum AD, EG sint ut abscissæ correspondentes CD, CG. Nam factâ quocumque in loco sectione verticali EHF, quia Fig. 45.

 cen-

centrum ſuæ gravitatis eſt punctum G; erit momentum reſiſtentiæ in loco illo, ut ſectio ipſa EHF, multiplicata per ordinatam EG: adeòque, quia ſectio EHF, velut circularis, eſt ut quadratum ejuſdem EG; erit idem momentum reſiſtentiæ, ut cubus ex EG, qui ob naturam aſſumptæ parabolæ datam ſervat rationem cum CG. Jam verò momentum ponderis, quod pendet ex ſolidi extremitate, eſt ut brachium vectis CG, cui concipitur pondus applicatum. Itaque momentum reſiſtentiæ in ſectione EHF datam ſervat rationem cum momento ponderis; atque adeò, quum eadem ſit demonſtratio in omni aliâ ſectione, erit ſolidum ABC ubique æqualis reſiſtentiæ.

Sed conſideratâ gravitate in ipſo ſolido, poſſunt etiam nonnulla inveniri, quæ ſuſpenſa horizontaliter ſint æqualis ubique reſiſtentiæ. Hujuſmodi eſt cuneus parabolicus
FIG. 46. ABCDEF, quem ſuppono eſſe complementum illius, de quo paulò ante locuti ſumus. Nam factâ quocumque in loco ſectione verticali GHIK, ſi L ſit centrum ſuæ gravitatis, erit momentum reſiſtentiæ in loco illo, ut ſectio ipſa GHIK, ducta per altitudinem ML, hoc eſt ob datam GK, ut rectangulum NML, vel etiam ut MN, ſive GH quadratum. Sed poſito, quod P ſit centrum gravitatis portionis ex cuneo abſciſſæ GHIKEF, & de-

& demisso perpendiculo PQ, momentum illius portionis est, ut portio ipsa multiplicata per MQ, hoc est ob datam GK, ut factum ex superficie FGH in MQ, vel etiam ut quadrato-quadratum ex FG; quum tam MQ cum FG, quàm superficies FGH cum cubo ipsius FG ob naturam parabolæ datam servet rationem. Itaq; momentum resistentiæ in sectione GHIK erit ad momentum portionis abscissæ GHIKEF, ut quadratum ex GH ad quadrato-quadratum ex GF, sive etiam ut GH ad GF quadratum; adeòque ob parabolæ naturam in datâ ratione.

Ejusdem naturæ est solidum ABC, ortum ex revolutione parabolæ Apollonianæ CA circa rectam CD, quæ eam contingit in vertice principali. Nam factâ quocumque in loco sectione verticali EHF, quia centrum suæ gravitatis est punctum G, erit momentum resistentiæ in loco illo, ut sectio ipsa EHF, multiplicata per EG; hoc est, ob sectionem circularem, ut cubus ipsius EG. Sed posito, quod I sit centrum gravitatis portionis ex solido abscissæ EHFC, momentum ejus portionis est, ut portio ipsa multiplicata per GI; hoc est, ut sectio EHF multiplicata per rectangulum CGI; sive etiam, ut factum ex EG quadrato in CG quadratum, quum propter parabolæ naturam GI datam servet rationem cum GC. Quare momen- FIG. 47.

tum resistentiæ in sectione EHF erit ad momentum portionis ex solido abscissæ EHFC, ut cubus ex EG ad factum ex EG quadrato in CG quadratum; hoc est, ut EG ad CG quadratum; adeòque, ob parabolæ naturam, in datâ ratione.

Tale etiam est solidum ejusdem ubique altitudinis, quod habet pro basi suâ horizontali spatium logarithmicum infinitum (sive potius infinitè longum) ADEC. Nam si hujusmodi solidum secetur verticaliter secundùm aliquam logarithmicæ ordinatam BF; ob eandem ejus altudinem, erit momentum resistentiæ in sectione illâ, ut ordinata ipsa BF, & momentum portionis abscissæ, ur spatium infinitum BFEC, multiplicatum per distantiam sui centri gravitatis ab ordinatâ BF. Jam verò observatum est à Christiano Hugenio, distantiam istam æqualem esse subtangenti OF, quæ est constantis longitudinis. Itaque momentum resistentiæ in factâ sectione erit ad momentum portionis ex solido abscissæ, ut ordinata BF ad spatium infinitum BFEC; adeòque in ratione datâ, quum eidem curvæ logarithmicæ hoc etiam accidat, ut spatium quodvis infinitum BFEC, veluti duplum trianguli BOF, sit semper ut ordinata correspondens BF.

Atque hæc de solidis, quæ ita quidem hori-

horizontaliter ſuſpenduntur, ut una extremitas alicubi ſit affixa, altera liberè pendeat. Ponamus modò ſolidum ABCD, quod ſemper homogeneum intelligi debet, utrâque ſui extremitate inniti duobus fulcimentis A, & D; jamque ſi centrum ſuæ gravitatis ſit in plano ſectionis verticalis EFG, concipi poterit tota ſolidi reſiſtentia veluti collecta, & coacervata in ipſâ ſectione EFG: proindeque definietur per eandem ſectionem EFG ductam in ſolidi longitudinem AD. Unde ſi M ſit ſectionis centrum gravitatis, exiſtens in lineâ verticali FN, momentum ejuſdem reſiſtentiæ habebitur, multiplicando ſectionem EFG primò per longitudem ſolidi AD, & deinde per rectam MN. Fig. 48.

Et quoniam in eâdem ſectione EFG colligitur etiam, & coacervatur tota ſolidi gravitas; manebunt omnia in eodem ſtatu, ſi ſolidum concipiatur expers omnis gravitatis, & ex puncto F ſuſpendatur pondus P tantundem gravitans, quantum ſolidum ipſum. Jam verò pōdus P impetum facit adversùs reſiſtentiam, non modò vi ſuâ abſolutâ, verùm etiam tam propter diſtantiam ejus à fulcimento A, quàm propter diſtantiam à fulcimento D. Quare momentum ſolidi ABCD innixi utrâque ſui extremitate fulcimentis A, & D habebitur, multi-

plicando pondus ejus absolutum P primò per distantiam unam AF, & deinde per distantiam alteram DF.

Jam sectio EFG in designando momento resistentiæ idem præstat, ac maximum pondus, quod solidum verticaliter suspensum sectione illâ potest sustinere. Quocirca si supponamus, P esse maximum pondus, quod sustinere potest, dum innititur fulcimentis A, & D; erit primum pondus ad secundum, ut rectangulum AFD ad rectangulum ex AD in MN. Ex quo facilè colligi potest, quod si solidum ABCD habeat figuram prismatis, ita ut secta sit bifariam tam altitudo FN in puncto M, quàm longitudo AD in puncto F, maximum pondus, quod sustinere posset prisma suspensum verticaliter, sit ad maximum pondus, quod sustinet innixum fulcimentis A, & D, ut est longitudo prismatis dimidiata ad ejus altitudinem.

Quum solidum ABCD innititur duobus fulcimentis A, & D, consideraturque velut expers omnis gravitatis; erit illud æqualis ubique resistentiæ, si factâ ubicumque sectione verticali EFG reperiatur, quod momentum resistentiæ in hac sectione datam servet rationem cum momento alicujus ponderis P, pendentis ex infimo sectionis puncto F. Hinc, quia in omni sectione verticali

ticali EFG, cujus centrum gravitatis est punctum M, momentum resistentiæ est, ut sectio ipsa multiplicata per rectam MN, & in quolibet puncto F momentum dati ponderis P est, ut rectangulum AFD; erit solidum ABCD æqualis ubique resistentiæ, si quælibet sectio verticalis EFG multiplicata per rectam MN datam servet rationem cum rectangulo correspondente AFD.

Tale autem est solidum semicirculare, vel etiam semiellipticum ejusdem ubique crassitiei ABHCDE. Nam si aliquo in loco fiat sectio verticalis EFGH erit sectio ista parallelogrammum datæ basis: proindeque eadem sectio multiplicata per rectam MN, hoc est per distantiam centri suæ gravitatis à rectâ EH, erit ut EF quadratum. Sed ob circuli, vel ellipsis proprietatem EF quadratum est, ut rectangulum AFD. Quare ex æquali sectio EFGH, multiplicata per rectam MN, datam habebit rationem cum rectangulo AFD; & propterea ex ostensis ipsum solidum ABHCDE erit æqualis ubique resistentiæ. FIG. 49.

Tale etiam est solidum ANDF, quod gignit revoluta circa rectam AD ellipsis altera AND talis naturæ, ut cubus cujusque ordinatæ MN sit, ut rectangulum AMD ex correspondentibus ipsius AB portionibus contentum. Nam si aliquo in loco fiat se- FIG. 50.

ctio verticalis EFGN, erit sectio ista, velut circularis, ut quadratum ordinatæ MN; adeòq; eadem sectio EFGN multiplicata per MN erit, ut cubus ipsius MN. Sed ex hypothesi cubus ordinatæ MN est, ut rectangulum AMD. Igitur ex æquali data erit ratio, quam sectio EFGN multiplicata per MN habet ad rectangulum AMD: proindeque ipsum solidum ANDF erit ubique æqualis resistentiæ.

Aliud solidum æqualis etiam ubique resistentiæ suppetit nobis præclara illa proprietas parabolæ Apollonianæ à Pappo primùm indicata: nimirum, quod si ABD sit
FIG. 51. parabola ista, cujus axis recta BC, & basis recta AD, quælibet ad basim demissa perpendicularis EF proportione correspondeat rectangulo AFD, utpote quæ multiplicata per parametrum axis, rectangulum constituat æquale ipsi AFD. Hinc enim patet, solidum æqualis altitudinis constitutum super ABDA esse ubiq; æquè resistens, quum innititur punctis A, & D, velut fulcimentis; quandoquidem factâ in aliquo loco sectione verticali EFGH, erit sectio ista parallelogrammum datæ altitudinis; atq; adeò eadem sectio multiplicata per MN, distantiam sui centri gravitatis à rectâ GH, erit semper, ut basis EF, & consequenter ut rectangulum AFD. Idemq; erit, si descriptâ ex alterâ parte para-

parabolâ aliâ A*b*D, quæ sit similis, & æqualis ipsi ABD, constituatur super totâ figurâ planâ ABD*b* solidum æqualis altitudinis, quod cylindrum parabolicum facilè vocabis.

In totâ hac doctrinâ de resistentiâ solidorum, horizontaliter suspensorum, illud tacitè cum Galilæo supposuimus, quod eadem illa vis resistentiæ, quæ ponderi reluctatur, quum solidum suspenditur verticaliter, agat etiam in pondus, licet brachio alicujus vectis applicata, in suspensione horizontali. Sed considerarunt Clarissimi Viri Leibnitius, & Mariottus fieri posse, ut id nequaquam sit verum; quia etsi in utrâque suspensione idem semper sit nexus partium, fieri tamen potest, ut fibræ sectionis, in qua vim resistentiæ consideramus, non ita æqualiter tendantur in suspensione solidi horizontali, quàm, quum idem solidum suspenditur verticaliter: quod utique si verum esset, vis resistentiæ, quæ agit in pondus, non erit eadem in utrâque suspensione.

Fibras namque solidi suspensi extensibiles esse, & capaces tensionis; id utique naturalis suadet ratio, quotidiana confirmat experientia. Huic autem consequens est, easdem fibras eò magis resistere, quò majorem tensionem patiuntur; nec ubi resistunt, omnem suam vim adhibere, nisi, quum ad ulti-

ultimum tenſionis gradum pervenerint. Jam, quotieſcumque ſolidum ſuſpenditur horizontaliter, ratione hypomochlii, quod locum habet in hac ſuſpenſione, vires fibras tendentes eò majores ſunt, quò magis fibræ ipſæ recedunt ab hypomochlio. Unde in hypotheſi, quod tenſiones proportionales ſint viribus tendentibus, erunt tenſiones ipſarum fibrarum inter ſe in eâdem diſtantiarum ratione; atque adeò in hac eâdem ratione erunt etiam vires, quibus ſingulæ illæ fibræ reſiſtunt.

Perſpicuum eſt autem in hoc ſyſtemate, non modò vim reſiſtentiæ deſignari non poſſe per ſectionem, in qua vim illam conſideramus, ſed neque etiam centrum reſiſtentiæ idem eſſe cum centro gravitatis ipſius ſectionis. Quocirca, ut utrumque determinemus, ſit CAC ſectio ſolidi, cujus baſis
FIG. 52. CC ſit hypomochlium, & axis AB radius, qui in ſolidi fractione motum regit circularem. Deſignet idem axis AB tenſionem, ad quam perveniunt fibræ omnes exeuntes ex baſe CC, & deſcribatur figura alia DBD talis naturæ, ut ductâ ex quolibet axis puncto M ordinatâ MON ſit ſemper, ut MN ad MO, ita AB ad BM. Dico vim reſiſtentiæ, quæ exercetur in ſectione CAC in hypotheſi tenſionum æqualium, eſſe ad vim reſiſtētiæ, quæ in eâdem exercetur ſectione, quum tenſio-

nes

nes fibrarum proportione correſpondent earund.m diſtantiis ab hypomochlio CC, ut eſt ſectio ipſa CAC ad novam figuram DBD.

Reſiſtunt namque fibræ ſectionis CAC pro ratione teſionis. Itaq;in hypotheſi,quod tenſiones fibrarum proportionales ſint diſtātiis ipſarum ab hypomochlio CC, vis reſiſtentiæ fibrarum, exeuntium ex ordinatâ aliquâ NN, habebitur multiplicando ordinatam illam per BM, ſive etiam OO per AB: ex quo facile erit inferre, vim reſiſtentiæ totius ſectionis in eâdē hypotheſi haberi, multiplicando figuram totam DBD per AB.Jam verò, quum ſingulæ fibræ tantam patiuntur tenſionem, quantam ſubeunt fibræ exeuntes ex baſe CC, habetur vis reſiſtentiæ totius ſectionis, multiplicando ſectionem ipſam per AB. Itaque vis reſiſtentiæ, quæ exercetur in ſectione CAC in hypotheſi tenſionum æqualium,erit ad vim reſiſtentiæ, quæ exercetur in eâdem ſectione in hypotheſi, quod tenſiones proportionales ſint diſtantiis ab hypomochlio,ut eſt ſectio CAC ad figuram DBD.

Hinc ſi vis reſiſtentiæ, quæ exercetur in ſectione CAC in hypotheſi tenſionum æqualium, deſignetur per ſectionem ipſam CAC; deſignabit figura DBD vim reſiſtentiæ ejuſdem ſectionis,quum tenſiones fibrarum proportione correſpondent diſtantiis

ſuis

suis ab hypomochlio CC. Et quoniam ordinatæ figuræ DBD habent inter se eandem rationem, ac vires, quibus resistunt fibræ exeuntes ex ordinatis correspondentibus sectionis CAC; erit punctum, in quo omnes istæ vires colliguntur, & coacervantur, idem omninò cum centro gravitatis figuræ DBD: proindeque quemadmodum, quum tensiones sunt æquales, momentum resistentiæ, quæ exercetur in sectione CAC, designatur per productum ex sectione ipsâ in distantiam centri suæ gravitatis ab hypomochlio CC; ita, quum tensiones proportionales sunt distantiis ab hypomochlio isto, momentum ejusdem resistentiæ definietur per productum ex figurâ DBD in distantiam sui centri gravitatis ab eodem hypomochlio.

Ex eo autem, quod figura DBD sit talis naturæ, ut ductâ ex quolibet axis puncto M ordinatâ MON, sit semper, ut MN ad MO, ita AB ad BM, duo colligi possunt, si eorum recordemur, quæ superiùs ostensa sunt de methodo determinandi centrum gravitatis in figuris regularibus, & de centro percussionis. Primum, quod si sectionis CAC sit H centrum gravitatis, sectio CAC habeat ad figuram DBD eandem rationem, quam habet AB ad BH. Et alterum, quod si punctum K sit centrum gravitatis figuræ DBD,

FIG. 52.

), idem fit etiam centrum percussionis
ctione CAC, quotiescumque circa ba-
suam CC movetur circulariter. Unde
ypothesi quod tensiones fibrarum pro-
ionales sint distantiis suis ab hypomo-
CC, etiam non descriptâ figurâ DBD,
iri poterit, tam vis resistentiæ, quæ
:etur in sectione CAC, quàm momen-
ipsius.
am primò si centrum gravitatis sectio-
:AC sit punctum H, definietur vis re-
itiæ, multiplicando sectionem CAC per
& dividendo productum per AB. Et
ndò si ejusdem sectionis CAC, quum
basim suam CC circulariter movetur,
centrum percussionis, definietur mo-
tum ejusdem resistentiæ, multiplican-
er BK quotientem, qui oritur ex illâ
ione. Unde si solidum, ad quod refer-
ectio CAC, habeat figuram prismatis,
nando momentum ponderis per fa-
ı ex pondere ipso in longitudinem pris-
is, habebitur momentum resistentiæ,
tiplicando per BK ipsam sectionem
:: ex quo haud difficile erit inferre,
imum pondus, quod sustineret prisma
ispensione verticali, esse ad maximum
lus, quod sustinet in suspensione hori-
ali, ut est longitudo prismatis ad BK.
linc siquidem basis prismatis, sive sectio
CAC

CAC sit parallelogrammum, erit ejus centrum percussionis K idem omninò cum centro percussionis axis AB : proindeque ex superiùs ostensis continebit BK duas tertias partes ipsius AB ; atque adeò maximum pondus, quod sustineret prisma suspensum verticaliter, erit ad maximum pondus, quod sustinet in suspensione horizontali, ut est longitudo prismatis dimidiata ad tertiam partem suæ altitudinis. Unde si porrò supponamus longitudinem prismatis duplam esse suæ altitudinis; maximum pondus, quod sustinet in suspensione horizontali, non dimidia, ut in hypothesi tensionum æqualium, sed tertia pars erit ejus, quod sustineret in suspensione verticali.

Itaque in hypothesi, quod tensiones fibrarum sectionis CAC proportionales sint distantiis ipsarum ab hypomochlio CC, ad definiendum momentum resistentiæ, multiplicare oportet sectionem CAC, non modò per rectam BH, quæ est distantia centri suæ gravitatis ab hypomochlio illo, verùm etiam per rationem, quam distantia centri percussionis ab eodem hypomochlio BK habet ad altitudinem sectionis AB. Unde facilè colligi potest, eadem illa solida, quæ ostensa sunt æqualis resistentiæ in hypothesi tensionum æqualium, esse etiam æquè resistentia in hac aliâ hypothesi; quandoquidem in omnibus iis

s solidis data est ratio, quam habet BK ad
ꞁB.

In eâdem doctrinâ de resistentiâ solidorum
orizontaliter suspensorum alia se se obtu-
t contemplatio Acutissimo Viro Jacobo
ernoullio: nimirum fieri posse, ut non
nnes fibræ sectionis, in qua vim resistentiæ
msideramus, tendantur, sed superiores
aidem tensionem, inferiores verò pressio-
em patiantur. Sanè dubitari non potest,
ain hæc hypothesis sit longè verisimilior
trâque præcedentium; sed de cætero idem
inde colligitur, ac ex hypothesi, quod
nnes fibræ tẽdantur. Nam, ut ipsemet Ber-
oullius observavit in Schediasmate, quod
seruit monumentis Regiæ Scientiarum A-
demiæ Parisiensis anni 1705., eadem vis,
aæ flectit, ex. gratiâ, rectangulum ABCD
AB in GF, tendendo fibras superiores FIG. 53.
antitate trianguli BSF, & comprimendo
feriores quantitate trianguli ASG, poterit
per puncto A tamquam hypomochlio ten-
re fibras omnes quantitate trianguli BAF.
In hanc considerationem descendit Vir
arissimus, facem præeunte Nobilissimo
iristiano Hugenio, qui ei illud opposuit,
m curvaturam laminæ elasticæ erudito
oi impertivit, ut constat ex Actis Lipsien-
ous anni 1695. Supposuit namque Ber-
ullius, quod ubi superficies laminæ ex-
te-

terior extenditur, interior maneat eadem, & immutata, ita ut unumquodque punctum ejus sumi possit pro hypomochlio vectis, quo mediante agunt in se mutuò vis tendens, & pondus laminam inflectens. Sed objecit Hugenius, verisimile esse, non tantùm superficiem externam extendi, verùm etiam contrahi internam: cui ultrò adhæsit Bernoullius, quia quicquid extensionis, id etiam compressionis capax esse debet.

Hinc itaque suborta Bernoullio elegans illa consideratio, quod in solidis horizontaliter suspensis, superiores quidem fibræ extendantur, inferiores verò comprimantur, & contrahantur. Sed hoc ipsum eum manuduxit ad contemplationem novi cujusdam centri, de quo nemo adhuc cogitaverat. Nam, quum fibræ superiores extensionem, compressionem inferiores patiantur; aderit procul dubio inter eas fibra aliqua, quæ nec tensionem subibit, nec pressionem. Quocirca punctum sectionis, ex quo egreditur fibra ista, centrum tensionis Vir acutissimus vocitavit; veluti est punctum S in in rectangulo ABCD, quotiescumque ex AB
FIG. 53. flectitur in GF.

Patet autem, punctum istud S facili negotio determinari inventâ ratione, quam habet BS ad AS, sive BF ad AG aut etiam triangulum BAF ad triangulum BAG. Sed ad

ad hanc rationem inveniendam, considerare priùs oportet, quod ſicuti vis, quæ tendit fibras ſuperiores quantitate trianguli BSF, poteſt ſuper puncto A, velut hypomochlio, tendere fibras omnes quantitate trianguli BAF; ita vis, quæ comprimit fibras inferiores quantitate trianguli ASG, poſſit ſuper puncto B, tamquam hypomochlio, comprimere fibras omnes quantitate trianguli BAG. Hinc enim ſequitur, quod eadem vis, quæ tendit ſuper puncto A fibras omnes quantitate trianguli BAF, potis ſit etiam comprimere eaſdem fibras ſuper puncto B quantitate trianguli BAG: proindeque in hypotheſi, quod fibræ tantundem comprimantur per aliquam vim, quantum per eandem extenduntur, fiet ſemper triangulum BAF ad triangulum BAG in ratione æqualitatis.

Atque hinc retinentes eandem hypotheſim, cognoſcemus, curvaturam laminæ elaſticæ eandem ſemper prodire, ſive ſuperficies ejus interior, & concava contrahatur, ſive non. Nam in hypotheſi, quod interna laminæ ſuperficies contractionem patiatur, non aliud novi inducitur, quàm quod hypomochlium vectis, quo mediante agunt in ſe mutuò vis tendens, & pondus laminam inflectens, non jam in ſuperficie illâ, ſed in ipsâ laminæ craſſitie debeat conſiderari.

rari. Quocirca semper, ac centrum tensionis in medio rectæ lineæ, laminæ crassitiem designantis, reperitur; erit locus omnium istorum hypomochliorum linea, quæ bisecat laminæ crassitiem; adeòque illam eandem curvaturam, quam habet linea ista, habebunt quoque ambæ laminæ superficies, quæ ei sunt parallelæ.

Vires tendentes proportionales esse ipsis tensionibus, suadet non parum axioma illud metaphysicum, quod causæ effectibus, quos producunt proportione semper correspondeant. Sed laudatus Jacobus Bernoullius arbitratur, hanc legem tensionum nequaquam posse à naturâ observari, eâ nempe ratione, quia tensiones non ita augeri possunt in infinitum, quemadmodum ipsæ vires tendentes: unde hoc etiam in resistentiâ solidorum horizontaliter suspensorum mutandum esse judicavit. Verum etsi persuasum habeam, nullam constantem tensionum legem in naturâ observari, sed eam pro diversâ corporum texturâ diversam existere; nihil tamen obstat, quominus assumamus, vires tendentes tensionibus proportione correspondere; nam quod tensio debeat esse infinita, quum ipsa vis tendens infinita pariter ponitur, id equidem cum infinitâ divisibilitate materiæ nequaquam pugnat.

CAP.

CAP. VIII.

De legibus motuum, quæ in mutuâ corporum collisione observantur.

POstremum, quod in artificiosâ corporum latione considerandum nobis occurit, sunt leges motuum, quæ in mutuâ eorum collisione debent observari. Legum istarum basis, & fundamentum sunt hæc duo theoremata. Primum, quod quantitas motus, quæ producitur, capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias, non mutetur ab actione corporum inter se. Alterum, quod eadem quantitas motus, quæ ratione illâ producitur, æqualis sit ei, qui oriretur, si utrumque corpus moveretur velocitate communis centri gravitatis.

Horum theorematum rationem reddere, haud arduum erit. Nam quantum ad primum, quia actio, & reactio sunt semper æquales, & contrariæ; necesse est, ut illæ æquales item mutationes efficiant in motibus versus contrarias partes. Itaque, si motus fiant ad eandem partem, quicquid additur motui corporis fugientis, subducetur ex motu corporis insequentis sic, ut summa maneat eadem, quæ prius. Si verò corpora

pora sibi mutuò obviam eant, æqualis erit subductio de motu utriusque; adeòque differentia motuum factorum ad contrarias partes adhuc manebit eadem.

Fig. 54. Quantum ad secundum, sint A, & B corpora duo, quorum commune centrum gravitatis sit C. Moveantur primum ad eandem partem, & pergant eodem tempore ad puncta *a*, & *b*, in qua positione sit *c* commune centrum gravitatis eorundem. Et quoniam longitudines A*a*, B*b*, C*c* eodem tempore describuntur à punctis A, B, C; designabunt longitudines illæ velocitates eorum punctorum. Unde patebit, summam motuum utriusque corporis æqualem esse ei, qui oriretur, si utrumque moveretur velocitate communis centri gravitatis; siquidem ostendi possit pondera corporum A, & B ducta in ipsas A*a*, B*b* tantundem efficere, quantum si utrumque simul duceretur in C*c*.

Id autem ostendemus in hunc modum. Concipiatur super rectâ AB normaliter insistere planum aliquod DE. Itaque per ea, quæ superiùs ostensa sunt de communi centro gravitatis quotcumque ponderum, erunt tam facta ex ponderibus corporum A, & B in distantias AD, BD æqualia ei, quod fit multiplicando utrumque pondus per CD, quàm facta ex iisdem ponderibus in distan-

tias

s *a*D, *b*D æqualia ei, quod oritur, mul-
licando utrumque pondus per CD. Unde
›ducendo terminos secundæ æqualitatis
.ine ex terminis primæ, supererunt facta
ponderibus corporum A, & B in ipsas
, B*b* æqualia ei, quod fit, multiplican-
utrumque pondus per C*c*.

Sed eadem corpora A, & B, quorum Fig. 55.
nmune centrum gravitatis est C, mo-
ıntur secundò ad partes contrarias, &
·gant eodem tempore ad puncta *a*, & *b*,
qua positione sit *c* ipsorum commune
vitatis centrum. Itaque longitudines A*a*,
, C*c*, velut descriptæ eodem tempore à
nctis A, B, C, designabunt adhuc ve-
itates eorum punctorum. Quare pate-
, differentiam motuum utriusque cor-
:is æqualem esse ei, qui oriretur, si utrum-
e moveretur velocitate communis centri
ıvitatis, siquidem ostendi possit, ponde-
corporum A, & B ducta in ipsas A*a*, B*b*
ia facta producere, ut differentia eorum
torum æqualis sit ei, quod fit, multipli-
ıdo utrumque pondus per C*c*.

Id verò ostendetur hac ratione. Conci-
ıtur super rectâ AB ad rectos angulos in-
ere planum aliquod DE. Igitur ex iis,
æ superiùs ostensa sunt de communi cen-
› gravitatis quotcumque corporum, erunt
n facta ex ponderibus corporum A, & B

in distantias AD, BD æqualia ei, quod fit, multiplicando utrumque pondus per CD, quàm facta ex iisdem ponderibus in distantias aD, bD æqualia ei, quod oritur multiplicando utrumque pondus per cD. Quare subducendo terminos secundæ æqualitatis ordine ex terminis primæ, remanebit differentia factorum ex ponderibus corporum A, & B in ipsas Aa, Bb æqualis ei, quod fit, multiplicando utrumque pondus per Cc.

Sed videamus modò, qua ratione horum theorematum beneficio determinari possint leges motus in mutuo corporum congressu. Hunc in finem distinguenda sunt prius duo corporum congredientium genera; unum nempe eorum, quæ vim habent elasticam, per quam compressa resiliunt; alterum illorum, quæ tali vi sunt penitùs destituta, qualia fortè in rerum naturâ sunt nulla. Prioris generis corpora dici possunt elastica, sive actuosa; ea verò, quæ sunt alterius generis, inertia sive otiosa appellabimus. Nec equidem confundenda sunt inter se duo ista corporum genera; quandoquidem aliæ sunt leges motus in congressu corporum inertium, aliæ in collisione corporum elasticorum.

Itaque quantum ad corpora inertia, si supponamus ea ab omnibus aliis ita esse divisa,

ſa , ac ſejuncta , ut eorum motus à corpo-
ɔus adjacentibus nec juventur , nec impe-
antur , eadem poſt occurſum unà cum
ɔmmuni gravitatis centro junctim move-
untur . Neque enim corpus fugiens tar-
ius moveri poteſt, quàm corpus inſequens;
uia ſic impedimento eſſet motui corporis
nſequentis , atque adeò de velocitate iſtius
liquid ſemper exciperet , uſque donec æ-
ſuè velocia redderentur . Neque etiam mo-
veri poteſt celerius, quia id, quod temperat,
& gubernat motum ejus , eſt corpus inſe-
quens.

Ex eo autem , quod corpora inertia poſt occurſum unà cum communi gravitatis centro junctim moveantur , perſpicuum eſt corpora illa poſt impactum eâdem planè velocitate moveri , qua commune fertur ipſorum gravitatis centrum . Jam velocitas communis centri gravitatis duorum corporum à mutuâ earum actione non mutatur. Nam ex primo theoremate quantitas motus, quæ producitur , capiendo ſummam motuum factorum ad eandem partem , & differentiam factorum ad contrarias , eadem manet poſt occurſum , quæ erat & ante . Sed huic motus quantitati æqualis eſt illa , quæ oriretur, ſi utrumque corpus velocitate communis centri gravitatis moveretur . Itaque hæc alia motus quantitas eâdem quoque

ſemper perſeverat: quod profectò fieri non poteſt, niſi velocitas communis centri gravitatis poſt actionem corporum maneat eadem, & invariata.

Quum igitur commune centrum gravitatis duorum corporum eandem retineat velocitatem tam ante, quàm poſt occurſum, movebuntur corpora inertia poſt impactum eâdem velocitate, qua commune centrum gravitatis ipſorum ante ferebatur. Unde, quia per theorema ſecundum velocitas iſta tanta eſt, ut ſi eâ utrumque corpus moveretur, eadem oriretur motus quantitas, quæ producitur, capiendo ſummam motuum factorũ ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias; invenietur velocitas, qua corpora inertia junctim moventur poſt occurſum, ſi ſumma motuum factorum ad partem eandem, vel differentia factorum ad partes contrarias per pondus utriuſque corporis dividatur.

Ponamus itaque, corpus A duplum habere pondus reſpectu corporis B, & quod ea ad eandem partem ſubinde moveantur, ut corpus inſequens A ſeptem habeat velocitatis gradus interea, ac fugiens B uno tantùm gradu movetur. Et quoniam corporis A quatuordecim ſunt gradus motus, dum alterum B uno tantùm motus gradu agitatur; erit ſumma motuum ad eandem partem
gra-

aduum quindecim. Unde, quia numerus
rnarius designat pondus utriusque corpo-
s simul, dividendo 15 per 3, designabit
uotiens 5 velocitatem utriusque corporis
ost occursum: & propterea, quum utrum-
ue corpus quinque gradibus velocitatis fe-
atur post occursum; erunt corporis A de-
em gradus motus, & corporis B quinque si-
militer post impactum.

Habeat corpus A duplum pondus respe-
ctu corporis B, sed ponamus B quiescere in-
terea, ac alterum A sex gradibus velocitatis
movetur versus ipsum. Et quoniam dum B
quiescit, alterum A duodecim habet gradus
motus; erit summa motuum utriusque cor-
poris similiter graduum duodecim. Unde,
quia pondus utriusque corporis simul hic
etiam per numerum ternarium designatur;
dividendo 12 per 3 exhibebit quotiens 4 ve-
locitatem utriusque corporis post occursum:
proindeque, quia utrumque corpus post oc-
cursum fertur quatuor gradibus velocitatis;
erunt corporis A octo gradus motus, & cor-
poris B quatuor post mutuam ipsorum col-
lisionem.

Ponamus denique eadem corpora A, & B
sibi mutuò obviam ire, sed ita tamen, ut
corpus A septem habeat gradus velocitatis
interea, ac alterum B duplici tantùm gra-
du movetur. Et quoniam motus corporis
A est

A est graduum quatuordecim, dum alterum B duos dumtaxat habet gradus motus; erit differentia motuum factorum ad contrarias partes graduum duodecim. Sed pondus utriusque corporis simul designatur per numerum ternarium. Itaque dividendo 12 per 3, dabit quotiens 4 velocitatem utriusq; corporis post impactum: & propterea, quum ambo corpora A, & B quatuor gradibus velocitatis ferantur post occursum; erunt corporis A octo, & corporis B quatuor gradus motus post mutuam eorum collisionem.

Atque hæc quidem pro corporibus inertibus, sibi mutuò occurrentibus; videamus modò, qua ratione defininiendæ sint leges motuum in occursu eorum corporum, quæ dicuntur elastica, sive actuosa. Et quoniã hujusmodi corpora illa sunt, quæ vim habent elasticam, qua agente compressa resiliunt; id primò videndum est, quid corporibus addat hæc vis elastica, & quem pariat effectum in ipso corporum congressu.

Nimirum quemadmodum corpora inertia post occursum debent eâdem velocitate junctim moveri unà cum communi centro gravitatis ipsorum, quia nulla datur causa, per quam à se mutuò debeant separari; ita præcipuus elasticitatis effectus est, ut corpora congredientia à se mutuò æqualiter, hoc est æqualibus viribus resiliant, & diver-

:rſis velocitatibus aliquando ad eandem, liquando ad partes contrarias moveantur.

Sit enim corpus aliquod elaſticum quiescens, & immobile, cujus ſuperficies vi alrius corporis occurrentis introrſum comrimatur. Et quoniam ſtatim, ac ceſſat vis omprimens, ſive motus corporis occurrenis, alterum vi ſuâ inſitâ elateris in priſtiiam figuram ſe reſtituet, & cum eâ vi urebit corpus primum; reflectetur hinc corous occurrens, vel eâdem omninò velocitae, quam priùs habebat, vel etiam datâ parte illius velocitatis. Sed ſi utrumque corpus ſit elaſticum, eo caſu vis elaſtica in utroque corpore æqualiter aget, & æquales motus mutationes ad contrariam partem producet; propter eam naturæ legem, quod actio, & reactio ſint ſemper æquales, & contrariæ.

Exinde autem, quod corpora elaſtica poſt occurſum ratione elateris æqualibus viribus à ſe mutuò reſiliant, facile erit leges congreſſuum pro corporibus elaſticis unâ ſimiliter regulâ definire. Si enim ſupponamus corpora eſſe perfectè elaſtica, hoc eſt eâdem vi reſilire à ſe invicem, qua comprimuntur; jam utriuſque velocitas poſt reflexionem ratione elaſticitatis eadem erit cum illâ, qua acceſſerunt ad ſe mutuò, hoc eſt cum ſummâ ſuarum velocitatum,

tum, si movebantur ad plagas contrarias, cum differentiâ verò, si motus fiebant ad eandem plagam. Unde, quum à se invicem debeant æqualibus viribus resilire, dividenda erit ipsis hæc velocitas in reciprocâ suorum ponderum ratione: proindeque definientur leges congressuum pro corporibus perfectè elasticis, si præter illam velocitatem, qua junctim moverentur post occursum, si velut inertia considerentur, habeatur quoque ratio velocitatum, quibus ratione elasticitatis à se mutuò reflectuntur.

Verumtamen, ut generalis hæc regula meliùs intelligatur, non abs re erit, eam aliquibus exemplis illustrare. Itaque sint A, & B duo corpora perfectè elastica, & supponamus primò, corpus A ratione ponderis duplum esse corporis B, eademque ita quidem ad eandem partem moveri, ut corpus insequens A septem habeat velocitatis gradus interea, ac alterum B uno tantùm gradu movetur: adeò, ut si corpora illa inertia essent, utrumque post occursum versus eandem quoque partem quinque gradibus velocitatis moveri debeat. Et quoniam velocitas, qua accedunt ad se mutuò, utpote æqualis differentiæ suarum velocitatum, est graduum sex; divisâ quidem eâ ipsis corporibus in reciprocâ suorum ponderum ratione, obtingent corpori A gradus duo,

o, & corpori B gradus quatuor velocita-, iisque velocitatibus à se mutuò resi-:nt. Unde jam, quia ipsa corpora A, & B opter regulam corporum inertium mo-:ntur quoque junctim versus eam partem, ı quam resilit corpus B cum quinque gra-ibus velocitatis; habebit post occursum orpus B novem gradus velocitatis, & cor-us A tantummodò tres, iisque velocita-ibus adhuc versus eandem partem move-›untur.

Supponamus secundò, quod corpus A sit quidem duplum corporis B ratione ponderis, sed tamen, ut ipsum corpus B quiescat interea, ac alterum A sex gradibus velocitatis movetur: adeò, ut si corpora illa inertia essent, utrumque post occursum versus eandem partem quatuor gradibus velocitatis moveri debeat. Et quoniam velocitas, qua corpora accedunt ad se mutuò, utpote illa eadem, qua corpus A impingit in aliud B, est graduum sex; divisâ quidem eâ ipsis corporibus in reciprocâ suorum ponderum ratione, habebit corpus A gradus duos, & corpus B gradus quatuor velocitatis, iisque velocitatibus à se mutuò resilient. Unde jam, quia ipsa corpora A, & B, propter regulam corporum inertium, movetur quoque junctim versus eam partem, in quam resilit corpus B, cum quatuor gradibus veloci-

locitatis; erunt post occursum in corpore B octo gradus velocitatis, & in corpore A duo dumtaxat, eaque cum istis velocitatibus versus eandem quoque partem movebuntur.

Supponamus denique, quod eadē corpora A, & B moveantur ad partes contrarias, hoc est sibi mutuò obviam eant, A quidem gradibus septem, & B duplici tantùm gradu velocitatis: ita ut si ea corpora inertia essent, utrumque post occursum versus eandem partem quatuor gradibus velocitatis moveri debeat. Et quoniam velocitas, qua accedunt ad se mutuò, utpote æqualis summæ suarum velocitatum, est graduum novem; divisâ quidem eâ ipsis corporibus in reciprocâ suorum ponderum ratione, obtingent corpori A gradus tres, & corpori B sex gradus velocitatis, iisque velocitatibus à se mutuò resilient. Unde jam, quia ipsa corpora A, & B, propter regulam corporum inertium, moventur quoque junctim versus eam partem, in quam resilit corpus B, cum quatuor gradibus velocitatis; habebit post occursum corpus B decem gradus, & corpus A unicum dumtaxat gradum velocitatis, iisque velocitatibus versus eandem quoque partem movebuntur.

Iam in occursu corporum elasticorum illud, quod vel præcedit, quum motus fiunt

ad

eandem partem, vel minorem habet
ıantitatem motus, quum fiunt ad plagas
ntrarias, vel denique quiescit, versus eam
mper plagam movebitur post occursum, ad
uam fieret motus ejus, si utique ve-
ıt iners consideretur; sed non item cor-
us alterum, quippe quod modò versus
lagam illam, modò versus partem con-
rariam moveri potest, quin etiam in-
erdum manere potest quiescens, & immo-
um. Si enim velocitas, qua per vim ela-
ticam reflectitur, minor sit velocitate, qua
movetur ratione inertiæ, ut evenit in om-
ıibus allatis exemplis; non mutabitur di-
lirectio ejus, sed perget adhuc moveri ver-
sus eandem plagam. Quod si verò fuerit
major, mutabitur ejus directio, & tendet
ad plagam contrariam. Ac denique si eidem
fuerit æqualis, tunc ad neutram partem
tendet, sed manebit quiescens, ac immo-
tum.

Quum corpora congredientia A, & B non modò sunt perfectè elastica, verùm etiam pondera habent æqualia, leges suorum motuum sunt multò quidem simpliciores. Ponamus etenim primò moveri illa versus eandem partem, ita ut insequens A majorem habeat velocitatem, quàm fugiens B. Jamque si $2a$ sit velocitas corporis insequentis, & $2b$ velocitas corporis fugientis; erit

$2a$

$2a - 2b$ velocitas, qua corpora accedunt à se mutuò; adeòque ratione elasticitatis resilient à se invicem velocitate designatâ per $a - b$. Unde, quum ratione inertiæ moveri debeant junctim versus eam partem, in quam resilit corpus B, velocitate $a + b$; erit post occursum $a + b + a - b$, hoc est $2a$ velocitas corporis B, & $a + b - a + b$, hoc est $2b$ velocitas corporis A, iisque velocitatibus versus eandem quoque partem movebuntur. Ex quo patet, quod, quum corpora perfectè elastica ejusdem sunt ponderis, & versus eandem partem moventur, post occursum tendant ad eandem plagam velocitatibus permutatis.

Ponamus secundò, eadem corpora A, & B sibi mutuò obviam ire, ita ut major quoque sit velocitas in corpore A, quàm in corpore B. Jamque posito adhuc, quod $2a$ sit velocitas corporis A, & $2b$ velocitas corporis B; erit $2a + 2b$ velocitas, qua corpora accedunt ad se mutuò: proindeque ratione elasticitatis resilient à se invicem velocitate designatâ per $a + b$: sed ratione inertiæ moveri debent junctim versus eam partem, in quam resilit corpus B, velocitate $a - b$. Quare post occursum erit $a + b + a - b$, hoc est $2a$ velocitas corporis B, & $a + b - a + b$, hoc est $2b$ velocitas corporis A, iisque velocitatibus ad contrarias quoque partes move-

:buntur. Ex quo liquet, quod, quum
›rpora perfectè elastica ejusdem sunt pon-
:ris, & sibi mutuò obviam eunt, post oc-
ırsum moveantur ad plagas contrarias, ve-
›citatibus permutatis.

Ponamus denique, quod corpus B quie-
at interea, ac alterum A movetur versus
›sum velocitate designatâ per $2a$. Et quo-
iam velocitas, qua corpora accedunt ad
: mutuò, est $2a$; resilient illa à se invicem
atione elasticitatis velocitate designatâ per
. Jam verò ratione inertiæ eadem corpora
noveri debent junctim versus eam partem,
n quam resilit corpus B, velocitate desi-
;natâ per eandem litteram a. Quare erit
post occursum $a + a$, hoc est $2a$ velocitas
corporis B, & $a - a$, hoc est nulla veloci-
tas corporis B. Ex quo colligi potest, quod
quum corpora perfectè elastica ejusdem sunt
ponderis, & unum quiescit interea, ac alte-
rum versus ipsum urgetur; post occursum
velocitatem corporis moti excipiat corpus
quiescens, ipsumque corpus, quod antea
movebatur, maneat immotum.

Quum corpora sunt inertia, summa mo-
tuum factorum ad eandem partem, & dif-
ferentia factorum ad partes contrarias, ut
antea vidimus, per occursum corporum non
mutatur. Sed non perinde res est, quum
corpora sunt elastica; quandoquidem, ratio-

ne elasticitatis, quantitas illa motus augeri, & minui potest. Interim etiam in corporibus elasticis aliquid constantis, & immutabilis ante, & post occursum reperitur; nam id, quod efficitur, ducendo singulorum pondera in quadrata suarum velocitatum, simul additum, tantùm erit post occursum, quantum erat & ante.

Fig. 54. Sint enim duo quævis corpora elastica A, & B, quæ moveantur primum ad eandem partem, sitque A corpus insequens, & B corpus fugiens. Designent rectæ AB, AC pondera eorum corporum, & rectæ AD, AE velocitates eorundem, ita ut motus ipsorum ante occursum sint, ut rectangula BD, CE. Referat porrò AF velocitatem, qua utrumque corpus post occursum ratione inertiæ junctim moveri debet. Itaque motus corporum post occursum, quum considerantur tamquam inertiâ, repræsentabuntur per rectangula BF, CF: proindeque per legem corporum inertium rectangula ista BF, CF simul sumpta ipsis BD, CE simul sumptis æqualia erunt.

Hinc, quum rectangulum DG æquale fiat rectangulo EH, erit ut DF ad FE, ita FH ad FG, sive AC ad AB. Quocirca, quia recta DE, quæ designat velocitatem, qua corpora accedunt ad se mutuò, subinde dividitur in puncto F, ut DF sit ad FE in reciprocâ ratione ip-

rum AB, AC, quæ pondera corporum designant; erunt DF, FE velocitates, quibus ratione elaſticitatis moveri debent corpora A, & B poſt occurſum: proindeque corpus fugiens B movebitur poſt impactum velocitate deſignatâ per ſummam rectarum AF, FE; & corpus inſequens A velocitate deſignatâ per differentiam rectarum AF, DF.

Ponatur jam $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$, $AE = d$, & $AF = e$. Erit igitur $DF = c - e$, & $FE = e - d$; atque adeò ſumma rectarum AF, FE erit $2e - d$, differentia verò rectarum AF, DF erit vel $2e - c$, vel $c - 2e$. Et quoniam rectæ AB, AC deſignant pondera corporum A, & B; & rectæ AD, AE deſignant velocitates eorundem ante occurſum: id, quod efficitur ducendo ſingulorum pondera per quadrata ſuarum velocitatum ante occurſum, erit $acc + bdd$. Eſt autem poſt occurſum ſumma rectarum AF, FE velocitas corporis B, & differentia rectarum AF, DF velocitas corporis A. Itaque id, quod fit multiplicando eadem corporum pondera per quadrata ſuarum velocitatum poſt occurſum, erit $4aee - 4ace + acc + 4bee - 4bde + bdd$.

Ex quo patet, eò rem redire, ut oſtendamus, ſubſiſtere æqualitatem iſtam $acc + bdd = 4aee - 4ace + acc + 4bee - 4bde + bdd$, ſive etiam, deletis quantitatibus, quæ ſe mu-

mutuò destruunt, hanc aliam $4aee + 4bee = 4ace + 4bde$, quæ divisis terminis omnibus per $4e$, reducitur ad istam $ae + be = ac + bd$: id quod perspicuum est, quum rectangula BD, CE simul sumpta æqualia sint rectangulis BF, CF simul etiam acceptis.

Fig. 55. Eadem corpora elastica A, & B sibi mutuò obviam eant, sitque in corpore A major quantitas motus. Designent quoque rectæ AB, AC pondera corporum A, & B, & rectæ AD, AE velocitates eorundem: ita, ut motus ipsorum ante occursum designentur per rectangula BD, CE. Referat porrò AF velocitatem, qua utrumq; corpus post occursum moveri debet junctim ratione inertiæ. Itaq; motus corporum post occursum, quum considerantur tamquam inertia, repræsentabuntur per rectangula BF, CF: proindeque per legem corporum inertium rectangula ista BF, CF simul sumpta æqualia erunt excessui, quo rectangulum BD superat rectangulum CE.

Hinc, quum rectangulum DG æquale fiat rectangulo EH, erit ut DF ad FE, ita FH ad FG, sive AC ad AB. Quocirca, quia recta DE, quæ designat velocitatem, qua corpora accedunt ad se mutuò, subinde dividitur in puncto F, ut DF sit ad FE in reciprocâ ratione ipsarum AB, AC, quæ pondera corporum designant; erunt DF, FE ve-

lo-

citates, quibus ratione elasticitatis moveri debent corpora A, & B post occursum: proindeque corpus B movebitur post impactum velocitate designatâ per summam rectarum AF, FE; & corpus A velocitate designatâ per differentiam rectarum AF, DF.

Ponatur jam $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$, $AE = d$, & $AF = e$. Erit igitur $DF = c - e$, & $FE = d + e$; atque adeò summa rectarum AF, FE erit $d + 2e$, differentia verò rectarum AF, DF erit vel $2e - c$, vel $c - 2e$. Et quoniam rectæ AB, AC designant pondera corporum A, & B; & rectæ AD, AE designant velocitates eorundem ante occursum: id, quod efficitur, ducendo singulorum pondera per quadrata suarum velocitatum ante occursum, erit $acc + bdd$. Est autem post occursum summa rectarum AF, FE velocitas corporis B; & differentia rectarum AF, DF velocitas corporis A. Itaque id, quod fit, multiplicando eadem corporum pondera per quadrata suarum velocitatum post occursum, erit $4aee - 4ace + acc + bdd + 4bde + 4bee$.

Ex quo patet, eò rem redire, ut ostendamus, subsistere æqualitatem istam $acc + bdd = 4aee - 4ace + acc + bdd + 4bde + 4bee$, sive etiam deletis quantitatibus, quæ se mutuò destruunt, hanc aliam $4aee + 4bde + 4bee = 4ace$, quæ, divisis terminis

Q 3 om-

omnibus per $4e$, reducitur ad istam $ae +$ $bd + be = ac$: id, quod perspicuum est, quum rectangula BF, CF simul sumpta æqualia sint excessui, quo rectangulum BD superat rectangulum CE.

FIG. 56. Quod si unum ex corporibus quiescat, non dissimiliter res ostendetur. Designent etenim rectæ AB, AC velocitates corporum A, & B, & quiescat corpus B interea, ac alterum A movetur versus ipsum velocitate designatâ per rectam AD. Referat porrò AF velocitatem, qua corpora ratione inertiæ moventur junctim post occursum. Et quoniam rectangula duo BF, CF simul sumpta æqualia sunt rectangulo BD, dempto communi BF, supererit rectangulum CF æquale rectangulo DG: adeòque, quum DF sit ad FA in reciprocâ ratione ipsarum AB, AC, & AD sit velocitas, qua corpora accedunt ad se mutuò; designabunt rectæ DF, FA velocitates, quibus corpora resiliunt à se invicem ratione elasticitatis.

Hinc post occursum movebitur corpus B velocitate designatâ per duplum rectæ AF, & corpus A velocitate designatâ per differentiam rectarum DF, FA. Unde positis $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$, & $AF = e$, erit $DF = c - e$; adeòque, quia id, quod fit multiplicando pondera corporum per velocitates ipsorum ante occursum, est acc; & id, quod fit

t multiplicando eadem corporum pondera er velocitates eorundem post occursum, est $cc - 4ace + 4aee + 4bee$: res eò reducetur, ut ostendamus, subsistere æqualitatem istam $acc = acc - 4ace + 4aee + 4bee$, sive etiam hanc aliam $ae + be = ac$: id, quod perspicuum est; quum rectangula duo BF, CF simul sumpta æqualia sint rectangulo BD.

Ex ipsâ autem pulcherrimæ hujus proprietatis demonstratione, patet leges motuum in corporibus elasticis definiri posse, etiamsi non considerentur tamquam inertia. Nam primò, quum corpora A, & B moventur ad eandem partem, posito quod AD designet velocitatem corporis insequentis A, AE velocitatem corporis fugientis B, & AF velocitatem, qua utrumque corpus post occursum moveri debet junctim ratione inertæ; designabunt ex ostensis DF, FE velocitates, quibus resiliunt à se mutuò propter elasticitatem. Quocirca corpus fugiens B movebitur post occursum velocitate suâ AE, auctâ duplo ejus, qua resilit ratione elasticitatis; & corpus insequens A velocitate suâ AD, diminutâ duplo ejus, per quam resilit ratione elateris. FIG. 54.

Secundò, quum corpora A, & B sibi mutuò obviam eunt, posito quod AD designet velocitatem corporis A, majorem quantitatem motus habentis, AE velocitatem alte- FIG. 55.

rius corporis B, & AF velocitatem, qua utrumque corpus post occursum moveri debet junctim ratione inertiæ; erunt ex ostensis DF, FE velocitates, quibus resiliunt corpora à se mutuò propter elasticitatem. Unde similiter corpus B, in quo minor erat quantitas motus ante occursum, movebitur post impactum velocitate suâ AE, auctâ duplo ejus, qua resilit ratione elateris; & corpus A velocitate suâ AD, diminutâ duplo ejus, per quam resilit ratione elasticitatis.

Fig. 56. Denique, quum corpus B quiescit interea, ac alterum A movetur versus ipsum, posito, quod AD designet velocitatem corporis mobilis A, & AF velocitatem, qua utrumque corpus ratione inertiæ moveri debet junctim post occursum; erunt ex ostensis DF, FA velocitates, quibus corpora propter elasticitatem resiliunt à se mutuò. Quare corpus quiescens B movebitur post occursum duplo ejus velocitatis, qua resilit ratione elasticitatis; & corpus mobile A perget moveri velocitate suâ AD, diminutâ duplo ejus, per quam resilit ratione elateris.

Itaque corpus illud, quod vel præcedit, quum motus fiunt ad eandem partem, vel minorem habet quantitatem motus, quum fiunt ad plagas contrarias, vel denique quiescit, movebitur post occursum veloci-

tate

e suâ, auctâ duplo ejus, qua resilit ratio-
elateris; vicissim verò corpus alterum
get moveri velocitate suâ, diminutâ du-
ejus, per quam resilit ratione elasticita-
. Unde corpus hoc alterum movebitur
sus eandem plagam cum corpore primo,
actâ subductione, id quod remanet velo-
itis sit positivum; sed si utique fuerit
ativum, tunc movebitur ad plagam
trariam; & si denique nihil ex subdu-
one illâ supersit, eo casu quiescet, & ad
tram partem movebitur.

Quum corpora sibi mutuò obviam eunt,
uimus semper quantitatem motus majo-
 esse in uno, quàm in altero. Sed fieri
oque potest, ut eadem sit in utroque cor-
e quantitas motus: nimirum si velocita-
us moveantur, quæ sint in reciprocâ
rum ponderum ratione. Jam hoc casu, si
pora sint inertia, necesse est, ut ambo
escant post occursum; quia differentia
tuum ante collisionem est nulla. Unde
m si fuerint perfectè elastica, movebun-
tantùm velocitatibus, quibus resiliunt
e mutuò: proindeque lex occursus talis
, ut reflectantur à se invicem iisdem ve-
tatibus, quibus ad se mutuò accesserunt.
n occursu corporum illud etiam tacitè
posuimus, ut corpora sint sphærica, &
ctè sibi mutuò occurrant. Sed si corpora
vel

vel non sphærica, vel diversis in rectis se moventia occurrant sibi invicem obliquè, & requirantur eorum velocitates post occursum; cognoscendus est situs plani, à quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concursus; deinde corporis utriusque velocitas resolvenda est in duas alias, unam huic plano perpendicularem, alteram eidem parallelam. Nam retentis velocitatibus parallelis, quippe quibus nequaquam corpora agunt in se mutuò; satis erit mutationes considerare, quæ ex velocitatibus perpendicularibus, & directè oppositis subnascuntur.

FIG. 57. Atque hac ratione facile erit ostendere, quod si corpus perfectè elasticum A incidat in firmum obicem DE obliquè secundùm lineam AB, ab illo ita reflectatur secundùm lineam BC, ut angulus reflexionis CBE æqualis sit angulo incidentiæ ABD. Etenim si compleatur rectangulum ADBF, & exponatur velocitas corporis incidentis per rectam AB, resolvetur ea in duas alias laterales, quas designabunt rectæ AD, AF. Sed corpus A per velocitatem AF nequaquam impingit in obicem, quum hæc velocitas urgeat corpus secundùm lineam superficiei obicis parallelam. Itaque omnis impactus fiet per velocitatem AD, sive BF, quæ urget corpus directè versus obicem. Jám verò, quum

im corpus sit perfectè elasticum, idem ectitur post impactum eâdem omninò veitate, qua in obicem impegit. Itaque si : BE ipsi BD æqualis, movebitur cors post reflexionem velocitatibus BE, BF. uare, completo rectangulo BECF, reflecter per diagonalem BC, eritque adeò angus reflexionis CBE æqualis angulo incidenæ ABD.

Patet autem, hanc legem in reflexione orporum observari, quotiescumque corpus, uod impingit in firmum obicem, ponitur erfectè elasticum, ita ut post impactum reiliat eâdem omninò velocitate, qua impegit in obicem. Sed longe secus res erit, si utique corpus perfectè elasticū non sit; quia eo casu angulus reflexionis minor fit semper angulo incidentiæ. Interim datâ ratione, quam vis comprimens habet ad vim resilientem, facile quoque erit lineam definire, per quam reflectitur corpus post impactum. Designet enim ut antea AD, sive BF vim comprimentem, hoc est velocitatem, qua corpus impingit in obicem, dum in eum obliquè incidit per rectam AB. Itaque si BG referat vim resilientem, hoc est velocitatem, qua resilit corpus ratione elateris; movebitur corpus post reflexionem velocitatibus BE, BG: proindeque, completo rectangulo BEHG, reflectetur per diagonalem BH, eritque

que angulus reflexionis HBE minor angulo incidentiæ ABD.

Hinc etiam id, quod superiùs assumpsimus, corpora elastica resilire à se invicem eâdem velocitate, qua accedunt ad se mutuò, locum sibi vindicat tantùm, quum corpora congredientia perfectè elastica sunt; nam si utique perfecto isto elatere non gaudeant, velocitas, qua resiliunt à se mutuò, minor semper erit velocitate, qua ad se invicem accedunt. Unde rursus, ad definiendas leges congressuum pro hujusmodi corporibus, nota esse debet ratio, quam in iis vis resiliens habet ad vim comprimentem. Ita, si vis resiliens fuerit ad vim, qua corpora comprimuntur, ut 2 ad 3; oportebit ratione elasticitatis dividere corporibus in reciprocâ suorum ponderum ratione, non quidem velocitatem totam, qua accedunt ad se mutuò, sed tantùm duas tertias partes illius.

Nonnulli erunt, quibus allatæ leges motuum vel ideò minus placebunt, quia cum regulis à Cartesio traditis pugnare videntur. Sed advertant velim, regulas suas deduxisse Cartesium ex duobus principiis, quæ cum ratione, & experientiâ pugnant omninò. Primum est, quod corpora propter quietem vim habeant ad resistendum. Alterum, quod in corporibus congredientibus eadem semper

perseveret quantitas motus. Horum e-
im utrumque falsum esse, liquidò patet.
n enim resistere possunt corpora propter
ietem; quia vis in corpore mobili minui-
: proportionaliter cum ipso motu, & cor-
ra tunc demum quiescere dicuntur, quum
nem suum motum amittunt. Neq; etiam
dem semper perseverat in corporibus con-
edientibus quantitas motus; quandoqui-
m motus contrarii se mutuò destruunt,
si per vim elasticam denuò nascantur.

Hinc falsum est etiam, quod contendunt
artesiani, corpora resilire à se invicem non
iâ de causâ, quàm quia ratione obstaculi
iutatur in corporibus directio ejus motus,
ui destrui non potest. Unica enim causa re-
lexionis est vis elasticitatis, & corpora hac vi
lestituta sistuntur, quotiescumque æquali-
ous motibus sibi mutuò obviam eunt. Atq;
noc quidem experiundo compobrari poterit,
si duo pendula æqualia ex æqualibus altitu-
dinibus ita sint dimissa, ut rectà in se invi-
cem incurrant. Si enim pendula illa sint ex
plumbo, vel argillâ molli; jam motum
suum omnem, vel ferè omnem amittent.
Quod si autem ex materiâ aliquâ elastica
sint; jam motus tantùm dumtaxat retine-
bunt, quantum à vi illâ elasticâ denuò acce-
perint.

Cæterùm leges corporum inertium supe-
riùs

riùs allatas tradidit primus omnium Johannes Wallisius in Actis Philosophicis Londinensibus, qui primus etiam veram causam reflexionis in aliis corporibus aperuit, eamque ab elasticitate docuit proficisci. Sed leges, quas corpora perfectè elastica observant, invenerunt seorsim, & eodem ferè tempore cum Societate Regiâ Anglicanâ communicarunt Christophorus Wrennus, & Christianus Hugenius. Possent autem circa postremas has leges plura alia observari; sed quoniam iis, qui sedulò considerare velint, quæ hactenus dicta sunt, sponte illa sese offerent, supervacaneum erit ulteriùs super hac re labores nostros extendere.

SECTIO III.

De Motu Gravium Naturali.

Quemadmodum gravia dicuntur ferri artificiosè, quotiescumque machinarum ope aliâ ratione moventur, quàm secundùm directionem gravitatis; ita naturaliter moveri dicuntur, quum subinde quidem feruntur, ut in latione gravitatis sequantur directionem. Possunt autem corpora gravia naturaliter moveri, non modò in planis verticalibus, sive perpendiculariter

ad

horizontem erectis, verùm etiam in pla-
obliquis, & utcumque ad horizontem
linatis. Unde de motu gravium naturali
uri, primò quidem considerabimus eo-
m descensum per plana verticalia; tum
inde casum eorundem per plana ad hori-
ntem inclinata expendemus.

CAP. I.

e descensu gravium per plana verticalia, sive recta ad horizontem.

VIdimus superiùs, vim gravitatis non eandem esse in omnibus à telluris centro distantiis; sed decrescere in recessu à centro illo in duplicatâ distantiæ ratione. Id autem nihil obstat, quominus in examinandis motibus gravium rectâ descendentium assumamus cum Galilæo, vim gravitatis eâdem semper, & constanti ratione in corpora gravia operari; qandoquidem motus corporum gravium prope telluris superficiem à nobis considerantur, ubi major, minorve corporis gravis à telluris centro distantia nequaquam efficere potest, ut actio gravitatis eadem ubique non deprehendatur.

Ex eo autem, quod vis gravitatis agat in corpora gravia eâdem, & cõstanti ratione, cõsequitur motum gravium rectâ descenden-
tium

tium esse æquabiliter acceleratum. Nam diviso tempore, quo grave corpus descendit, in particulas æquales, & indefinitè parvas, propter continuam,& constantem gravitatis actionem,si primâ temporis particulâ unum excipiat impulsum à gravitate, habebit secundâ temporis particulâ impulsum alium priori æqualem; adeòque corporis velocitas post hos duos impulsus prioris dupla erit. Unde etiam, quia tertiâ temporis particulâ impulsus alter, cuique priorum æqualis, ei per gravitatem imprimitur, fiet ipsius velocitas tripla ejus, quam primâ temporis particulâ habebat; & sic de cæteris. Quocirca gravi rectâ cadenti æqualibus temporibus æqualia semper accedent velocitatis incrementa; proindeque motus eius erit æquabiliter acceleratus.

Id colligi quoq;potest ex theoremate generali superiùs à Nobis ostéso,scilicet quod planum virium sit, ut velocitas, quam corpus habet in fine temporis, cui planum correspondet. Sit enim gravis rectâ descendentis
FIG. 58. AQNB planum virium; ita ut designatis temporibus per abscissas AP, AQ, referant ordinatæ correspondentes PM, QN vires, quæ agunt in grave corpus in fine eorum temporum. Et quoniam propter constantem gravitatis actionem vires, quæ agunt in corpus, sunt semper æquales, terminabitur pla-

planum virium AQNB rectâ BN, ipsi AQ parallelâ: proindeque areæ APMB, AQNB, quæ referunt velocitates, quas corpus habet in fine temporum AP, AQ, velut parallelogramma duo in iisdem parallelis constituta, erunt ut ipsa tempora AP, AQ. Est igitur velocitas gravis, rectâ descendentis, semper ut tempus, in quo acquiritur: quare æqualibus temporibus æqualia ei accedent velocitatis incrementa; atque adeò motus ejus erit uniformiter acceleratus.

Hinc si recta QR designet velocitatem, quam grave corpus rectâ descendens habet in fine temporis AQ, & per quodlibet aliud punctum P ducatur recta PO, ipsi QR parallela, quæ conveniat cum AR in puncto O; designabit PO velocitatem, quam idem corpus habet in fine temporis AP, eritque adeò triangulum AQR planum suæ velocitatis. Nam, propter similitudinem triangulorum AQR, APO, QR est ad PO, ut AQ ad AP. Sed velocitates gravis rectâ descendentis in fine temporum AQ, AP sunt, ut ipsa tempora AQ, AP. Quare ex æquali eædem velocitates erunt inter se, ut rectæ QR, PO; & propterea designante QR velocitatem, quam grave corpus habet in fine temporis AQ, designabit PO velocitatem, quam idem corpus habet in fine temporis AP.

Jam demonstravimus superiùs, spatium à corpore mobili utcumque descriptum plano suæ velocitatis proportione correspondere. Erit igitur spatium descriptum in tempore AP ad spatium descriptum in tempore AQ, ut est triangulum APO ad triangulum AQR. Sunt autem hæc duo triangula similia inter se, adeòque rationem habent duplicatam laterum homologorum AP, AQ. Quare spatia, quæ grave describit temporibus AP, AQ, erunt inter se, ut ipsorum temporum quadrata: proindeque motus gravium rectâ descendentium tali lege fiet, ut spatia, quæ ab initio descensus describuntur, sint semper, ut quadrata temporum descriptionis.

Hoc idem ostendi quoque potest ope illius theorematis, quod scala virium sit, ut quadratum velocitatis, quam reperitur corpus habere, postquam peragravit spatium, ad quod scala refertur. Sit enim AQNB scala virium gravis rectâ descendentis, ita ut designatis spatiis per abscissas AP, AQ, referant ordinatæ PM, QN vires, quæ agunt in corpus in fine temporum, quibus spatia illa percurruntur. Et quoniam, propter constantem gravitatis actionem, vires, quæ agunt in corpus, sunt semper æquales; terminabitur scala virium AQNB rectâ BN ipsi AQ parallela: proindeque areæ APMB

AQNB,

AQNB. quæ referunt quadrata velocitatum, quas corpus habet in fine temporum, quibus describuntur spatia AP, AQ, velut parallelogramma duo in iisdem parallelis constituta, erunt ut ipsa spatia AP, AQ. Sunt igitur spatia AP, AQ, ut quadrata velocitatum, quas spatiis iis descriptis grave corpus acquirit; & consequenter eadem spatia erunt quoque, ut quadrata temporum descriptionis, quum velocitates sint semper temporibus proportionales.

Itaque spatia, quæ grave corpus rectâ descendens describit, computata ab initio descensus, sunt semper tam ut quadrata temporum descriptionis, quàm ut quadrata velocitatum, quas in fine eorum temporum corpus acquirit. Hinc siquidem AQTVC sit scala reciproca suæ velocitatis, hoc est figura, in qua designatis spatiis per abscissas AP, AQ, referant ordinatæ correspondentes PS, QT reciprocè velocitates, quas spatiis iis descriptis grave corpus acquirit; erit ut AP ad AQ, ita QT quadratum ad PS quadratum: proindeque solidum, quod fit ex AP in PS quadratum, æquale erit solido, quod fit ex AQ in QT quadratum. Unde patet, lineam curvam TSV, quæ terminat scalam reciprocam velocitatis, esse hyperbolam, uno gradu altiorem hyperbolâ Apollonianâ, nimirum eandem illam, quam

Recentiores hyperbolam cubicam vocant, ejusque Asymptotos esse rectas AC, AQ.

Et quoniam ostensum est superius, scalam reciprocam velocitatis proportionalem esse tempori, quo describitur spatium, cui scala correspondet; erunt tempora, quibus describuntur spatia AP, AQ, ut areæ correspondentes APSVC, AQTVC. Unde, quia tempora illa sunt, ut velocitates in fine eorum acquisitæ, hoc est, ut rectæ QT, PS, sive etiam ob naturam hyperbolæ TSV, ut rectangula APS, AQT; erit ex æquali, ut area APSVC ad aream AQTVC, ita rectangulum APS ad rectangulum AQT; adeòque permutando, convertendo, & iterum permutando, erit area SVCH ad aream TVCK, ut rectangulum APS, sive AHS ad rectangulum AQT, sive AKT. Ex quo sequitur, differentiam duarum hujusmodi arearum HSTK proportione semper correspondere differentiæ rectangulorum AKT, AHS; atque adeò esse reciprocè, ut id, quod oritur, applicando rectangulum HAK ad KH; quum rectangula AKT, AHS sint in reciprocâ ratione ipsarum AK, AH.

Ex eo porrò, quod spatia à gravi rectâ cadente descripta, computata ab initio casus, sint in duplicatâ ratione temporum; sequitur, quod si tempora sumantur, ut numeri naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. spa-

tia

a hisce temporibus descripta, computan-
o ab initio motus, sint ut quadrata nume-
rum naturalium 1, 4, 9, 16, 25, 36 &c.
nde liquet ulteriùs, quod si tempora su-
antur æqualia, spatia, quæ grave corpus
escribit in singulis temporibus æqualibus,
nt ut numeri impares 1, 3, 5, 7, 9, 11,
c.; quum notum sit, ex continuâ horum
imerorum collectione oriri quadrata nu-
erorum naturalium. Quare gravia inter
escendendum subinde motum suum acce-
rabunt, ut spatia temporibus æqualibus
scripta eam inter se rationem retineant,
iam habent numeri impares ab unitate se
nsequentes.

Circa motum gravium rectâ descenden-
um illud etiam præteriri non debet, quod
atium, à gravi è quiete cadente dato tem-
re descriptum, dimidium sit ejus, quod
iali velocitate æquabiliter eodem tempore
scriberetur. Ostensum est enim, quod si
Q referat tempus; quo grave corpus è
iete cadens rectà descendit, & QR referat
locitatem in fine illius temporis acquisi-
n, spatium interea temporis descriptum
ut triangulum AQR. Jam verò spatium
iod tempore AQ describitur æquabiliter
locitate QR, est ut rectangulum AQR.
aque, quemadmodum triangulum AQR
midium est rectanguli AQR, ita quoque

ſpatium, quod grave è quiete cadens deſcribit tempore AQ, dimidium erit ejus, quod finali velocitate æquabiliter eodem tempore percurreret.

Hæc omnia conſequuntur ex hypotheſi illâ, quod vis gravitatis agat in corpora gravia eâdem ſemper, & conſtanti ratione. Non abludere autem à vero illiuſmodi hypotheſim, confirmant experimenta Galilæi, Ricciolii, & Hugenii, quippe quibus evincitur, ſpatia, quæ grave corpus rectâ deſcendens deſcribit, ab initio deſcenſus computata, eſſe inter ſe in duplicatâ temporum ratione, ſaltem aeris reſiſtentiâ ſublatâ. Interim, quia vera gravitatis theoria eſt, ut decreſcat in receſſu à tellure in duplicatâ ratione diſtantiæ à centro ejus, quemadmodum ſolidè collegit Eques Auratus Iſaac Newtonus ex totius mundani ſyſtematis cognitione; non abs re erit inquirere, quid in hac aliâ hypotheſi contingere debeat gravibus rectâ deſcendentibus.

FIG. 56.

Et primò quidem in hac aliâ hypotheſi, quod vis gravitatis ſit reciprocè, ut quadratum diſtantiæ à centro telluris, ſcala virium terminabitur eâdem illâ hyperbolâ cubicâ, qua terminatur in hypotheſi gravitatis conſtantis ſcala reciproca velocitatis, ſed relatè ad alteram ſuam aſymptotum conſideratâ. Etenim ſi C ſit centrum telluris, & deſi-

ignatis ſpatiis per abſciſſas AP, AQ, re- Fig. 59.
ant ordinatæ correſpondentes PM, QN
:es, quæ agunt in corpus in fine tempo-
m, quibus ſpatia illa percurruntur; erit
PM ad QN, ita CQ quadratum ad CP
ıadratum: proindeque, quia ſolidum,
ıod fit ex CP quadrato in PM, æquale eſt
lido, quod fit ex CQ quadrato in QN;
:it curva BMN illa eadem hyperbola cubi-
a, de qua paulò ante locuti ſumus, niſi
uod illic cōſiderabatur relatè ad aſympto-
um CD, hic verò puncta ejus omnia refe-
antur ad aſymptotum alterum AC.

Hinc area APMB, quæ eſt ut quadratum velocitatis, quam corpus acquirit percurſo ſpatio AP, erit reciprocè, ut rectangulum ACP applicatum ad AP, hoc eſt, ob datam AC, ut AP directè, & PC inversè. Atque ita quoque area AQNB, quæ eſt ut quadratum velocitatis, quam corpus nanciſcitur deſcripto ſpatio AQ, erit reciprocè, ut rectangulum ACQ applicatum ad AQ, hoc eſt, ob datam AC, ut AQ directè, & QC inversè. Unde liquet, in hypotheſi, quod vis gravitatis decreſcat in receſſu à tellure in duplicatâ ratione diſtantiæ à centro ejus, quadrata velocitatum, quas corpus in fine duorum quorumvis temporum reperitur habere, eſſe in ratione compoſitâ ex directâ ſpatiorum temporibus iis deſcriptorum, & re-

reciprocâ eorum, quæ remanent deſcribenda, quò ad telluris centrum grave corpus perveniat.

Itaque in hac aliâ hypotheſi, ſi grave corpus decidat ex A, & tempore aliquo deſcribat ſpatium AP, velocitas in fine illius temporis acquiſita tanta erit, ut quadratum ejus ſit, ut ſpatium deſcriptũ AP directè, & ſpatium deſcribendũ PC inversè. Unde modò ſi ſuper AC tamquam diametro, deſcribatur ſemicirculus AOC, & productâ ordinatâ rectangulâ PM uſque in O, agatur per punctum O recta CR, quæ abſcindat ex AB protractâ portionem AR, deſignabit portio iſta AR velocitatem, quam grave corpus reperitur habere in puncto P; quandoquidem propter triangula ſimilia CAR, CPO, AR quadratum eſt ad AC quadratum, ut PO quadratum ad PC quadratum, ſive etiam ut AP ad PC; adeòque, ob datam AC, erit AR quadratum, ut AP directè, & PC inversè.

Sit jam FACST ſcala reciproca velocitatis. Itaque tempus, quo deſcribitur ſpatium AP, erit ut area FAPST. Et quoniam ipſi PS eſt reciprocè proportionalis AR, erit areola SPps, ut Pp directè, & AR inversè: proindeque, quia Pp adæquat rectangulum POo applicatum ad radium ſemicirculi, & AR adæquat rectangulum CAO applicatum

:um ad CO; neglectis datis, erit areola SPps, ut solidum, quod fit ex tribus PO, CO, Oo, applicatum ad AO. Sed demisso super CO perpendiculo *ob*, AO est ad PO, ut Oo ad *ob*; atque adeò solidum, quod fit ex tribus PO, CO, Oo applicatum ad AO adæquat rectangulum ex CO in *ob*, hoc est duplum trianguli COo. Itaque eadem areola SPps erit, ut triangulum COo: proindeque, quia area tota FAPST proportionalis fit segmento circulari ACO, designabit segmentum istud circulare tempus, quo descri-spatium AP.

Ex quibus liquet, in hypothesi, quod vis gravitatis decrescat in recessu à tellure in duplicatâ ratione distantiæ à centro ejus, posse ope solius circuli determinari, tum tempus, quo spatium aliquod describitur, tum velocitatem in fine illius temporis acquisitam. Nam si A sit locus, unde decidit grave corpus, dum ad telluris centrum C conatur accedere, & AP sit spatium, quod in suo descensu rectilineo tempore aliquo describit; erectâ perpendiculari PO, quæ semicirculum AOC secet in O, ductâque per punctum O rectâ CR, abscindente ex AB ipsi PO parallelâ portionem AR, designabit segmentum circulare ACO tempus, quo describitur spatium AP, & recta AR velocitatem in fine illius temporis acquisitam.

tam. Nec reticebimus, quod quum segmentum illud circulare prodeat multiplicando quartam partem diametri AC per summam ex arcu AO, ejusque sinu recto PO, idem tempus descensus designari quoque possit per ordinatatam correspondentem cycloidis, quæ oritur ex revolutione semicirculi AOC super rectâ CD.

Circa vim gravitatis aliam olim hypothesim invexit magnus ille Senator Tolosanus Petrus Fermatius: nimirũ, quod ea esset distantiæ à centro telluris directè proportionalis: qua in re acerrima inter ipsum, & Dominum Robervallium contentio fuit, ut constat ex epistolis, quæ inter ejus opera posthuma editæ reperiuntur. Hæc hypothesis, si paucos quosdam excipias, qui eam amplexi sunt, communiter reijcitur; quum vis gravitatis in accessu ad tellurem augeatur potius, quàm minuatur. Interim Vir eximius Isaac Newtonus in corporibus, quæ à superficie telluris deorsum pergunt, arbitratur posse eam sibi locum vindicare. Unde, quæ sint leges descensus in hac etiam hypothesi, non gravabimur expendere.

FIG. 60. Itaque si A sit locus, unde decidit grave corpus, & C centrum telluris, terminabitur scala virium AQNB corporis rectâ descendentis lineâ rectâ BN, per telluris centrum

trum C transeunte; quandoquidem ordinatæ PM, QN, quæ referunt vires agentes in corpus in locis P, & Q, distantiis CP, CQ proportionales esse debeant. Ex quo sequitur, quadrata velocitatum iisdem in locis P, & Q esse, ut trapetia APMB, AQNB; hoc est, ut excessus trianguli ACB super triangulis PCM, QCN; vel etiam, ut excessus quadrati AC super quadratis CP, CQ: proindeque, si centro C, intervalloque CA describatur quadrans circuli AORD, erit quadrans iste scala velocitatum directa, hoc est figura, quæ ordinatis suis designat directè velocitates à corpore acquisitas in locis correspondentibus.

Sit jam FACEST scala reciproca velocitatum, hoc est figura, quæ ordinatis suis designat reciprocè easdem corporis velocitates. Itaque tempus, quo grave corpus describit spatium AP, designabitur per aream correspondentem FAPST. Et quoniam PS ipsi PO est reciprocè proportionalis; erit areola PS*sp*, ut P*p* directè, & PO inversè. Sed, quum O*o* sit ad P*p*, ut CO ad PO; erit O*o*, ut P*p* directè, & PO inversè. Igitur areola PS*sp* ipsi O*o* directè proportione correspondebit: proindeque, quum fiat area tota FAPST proportionalis arcui AO; tempus descensus per AP designari quoque poterit per arcum correspondentem AO.

Un-

Unde patet in hypothesi, quod vis gravitatis sit, ut distantia à centro telluris, posse solius quadrantis ope determinari, tum tempus, quo spatium aliquod describitur, tum velocitatem in fine illius temporis acquisitam. Etenim, si A sit locus, unde decidit grave corpus, dum conatur accedere ad centrum telluris C, & AP sit spatium, quod in suo descensu rectilineo tempore aliquo describit; erectâ perpendiculari PO, quæ secet quadrantem AORD in puncto O, designabit arcus AO tempus, quo describitur spatium AP, & sinus rectus PO velocitatem in fine illius temporis acquisitam. Hinc sicuti scala temporum in hypothesi, quod vis gravitatis sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ, est cyclois, quæ describitur per revolutionem semicirculi, qui in hypothesi illâ considerari debet; sic eadem scala temporum erit figura, quæ oritur, applicando arcus quadrantis AORD ad suos sinus versos, quum vis gravitatis distantiæ à centro directè proportionalis assumitur.

Sed in hac gravitatis hypothesi plura alia notatu digna occurrunt consideranda. Nimirum primò, quod tempus descensus per altitudinem totam AC sit ad tempus, quo possit corpus percurrere eandem viam cum uniformi velocitate, & æquali ei, quam in fine descensus reperitur habere, ut est

qua-

uadrantis circumferentia AORD ad raium AC. Nam si figura FACEST sit scala eciproca velocitatis corporis descendentis, rit rectangulum ACEG scala reciproca veocitatis, dum idem corpus prædictâ ratione ertur æquabiliter: proindeque tempus prinum ad tempus secundum erit, ut figura FACEST ad rectangulum ACEG: Unde eò es redit, ut ostendamus, figuram FACEST esse ad rectangulum ACEG, ut est quadrantis circumferentia AORD ad radium AC.

Id autem ostendemus in hunc modum. Quoniam PS, CE designant reciprocè velocitates corporis descendentis in punctis P, & C; erit ut PS ad CE, ita CD, sive CO ad PO. Jam verò PS est ad CE, ut areola SP*ps* ad areolam correspondẽtem rectanguli ACEG; itemque CO est ad OP, ut O*o* ad P*p*. Quare erit ex æquali, ut areola SP*ps* ad rectanguli ACEG areolam correspondentem, ita O*o* ad P*p*. Unde, quia hujus analogiæ, quocumque in loco consideretur, duo consequentes, hoc est secundus, & quartus terminus, tales sunt, ut dato uno, detur etiam & alter; erit quoque ut figura FACEST ad rectangulum ACEG, ita circumferentia AORD ad radium AC.

Secũdò, quod si corpus feratur æquabiliter velocitate ultimò acquisitâ eodem tempore, quo cecidit per altitudinem totam AC, descri-

ſcribat tempore illo longitudinem æqualem circumferentiæ quadrantis AORD. Oſtenſum eſt enim, tempus deſcenſus per AC eſſe ad tempus, quo eadem AC deſcriberetur æquabiliter velocitate finali, ut eſt circumferentia quadrantis AORD ad radium AC. Sed, quum corpus fertur æquabiliter, tempus, quo deſcribitur AC, eſt ad tempus, quo percurritur longitudo æqualis circumferentiæ AORD, ut eſt AC ad circumferentiam AORD. Igitur ex æquali ordinando tempus deſcenſus per AC erit ad tempus, quo velocitate ultimò acquiſitâ deſcribitur longitudo æqualis circumferentiæ quadrantis AORD in ratione æqualitatis.

Hoc idem oſtendi quoque poteſt ope illius theorematis, quod ſpatium à mobili utrumque deſcriptum plano ſuæ velocitatis proportione correſpondeat. Si enim circumferentia quadrantis AORD diſtendatur in directum, eique maneant ſinus perpendiculariter applicati, erit figura, quæ inde oritur ADC planum velocitatis corporis deſcendentis per altitudinem totam AC: proindeque ſpatium plano illo deſcriptum erit ad ſpatium, quod eodem tempore deſcriberetur æquabiliter velocitate finali, ut eſt figura ADC ad rectangulum circumſcriptum ADCH. Unde eò res redit, ut oſtendamus, figuram ADC eſſe ad rectangulum ADCH,

Fig. 60. 61.

ADCH, veluti est radius quadrantis AC ad ejus circumferentiam AORD; vel quia rectangulum ADCH fit multiplicando radium AC per circumferentiam AORD, ut area figuræ ADC æqualis sit quadrato, quod fit ex radio AC.

Id verò ostendetur hac ratione. Quoniam in quadrante ACD radius AC, sive CO est ad sinum PO, ut est arcus indefinitè parvus Oo ad correspondentem radii portionem Pp; erit rectangulum POo æquale rectangulo ex AC in Pp. Sed hæc æqualitas in omni quadrantis loco reperitur. Quare superficies, quæ oritur applicando ad singula puncta circumferentiæ quadrantis AORD sinus correspondentes, æqualis erit quadrato, quod fit ex radio AC. Est autem superficies eâ ratione genita area ipsius figuræ ADC. Itaque eidem AC quadrato æqualis quoque erit area figuræ ADC.

Denique, quod grave corpus ad telluris centrum C eodem semper tēpore perveniat, sive descendat per altitudinem AC, sive per aliam quamvis BC. Nam descriptis ex puncto C tamquam centro quadrantibus AD, BE, designabit CD velocitatem finalem in descensu per AC, & CE velocitatem finalem in descensu per BC. Quocirca eædem altitudines AC, BC finalibus illis velocitatibus eodem tempore æquabiliter FIG. 62.

de-

describentur. Unde describentur etiam eodem tempore, dum corpus per vim gravitatis urgetur; quandoquidem tempus descensus per quamlibet ex iis altitudinibus ad tempus, quo eadem altitudo velocitate finali æquabiliter percurritur, datam habet rationem.

Id ipsum ostendi quoq; potest hac aliâ ratione. Concipiantur in punctis A, & B duo mobilia æqualia, quæ describãt eodem tempore spatiola duo A*a*, B*b*. Itaque velocitatates acquisitæ erunt, ut sinus *a*M, *b*N, qui ab ipsis arcubus AM, BN sensibiliter non differunt. Sed eædem velocitates, velut eodem tempore genitæ, sunt etiam, ut vires, quibus eadem mobilia urgentur. Itaque, quia vires istæ designantur per rectas AC, BC, erit ut AC ad BC, hoc est ut AD ad BE, ita AM ad BN; adeòque permutando AD erit ad AM, ut BE ad BN.

Jam, quum grave corpus decidit ex A, tempus per AC est ad tempus per A*a*, ut AD ad AM. Atque ita quoque, quum grave corpus decidit ex B, tempus per BC est ad tempus per B*b*, ut BE ad BN. Quare erit ex æquali, ut tempus per AC ad tempus per A*a*, ita tempus per BC ad tempus per B*b*: proindeque permutando tempora per AC, BC erunt inter se, ut tempora per A*a*, B*b*. Unde, quemadmodum æqualia sunt tem-

tempora per Aa, Bb, ita quoque æqualia erunt tempora per AC, BC.

CAP. II.

De descensu gravium per plana ad horizontem inclinata.

ETsi superiori capite circa descensum gravium per plana verticalia varias gravitatis hypotheses assumpserimus; hìc tamen, ubi agendum nobis erit de descensu gravium per plana inclinata ad horizontem, in eâ tantùm hypothesi consistemus, quæ gravitatem ponit constantem, & invariatam. Sed, priusquam leges descensus expendendas aggrediamur, memores ejus, quod prætermisimus, dum de artificiosâ gravium latione egimus, vires plani inclinati in ponderibus sursum elevandis oportet definiamus.

Planum inclinatum vocamus, quod cum plano horizontali obliquos angulos constituit, veluti est AB respectu plani horizontalis BC. Hujusmodi planum conferre in ponderibus sursum elevandis, ex ipsâ, qua vis gravitatis operatur, ratione deducitur. Accedunt etenim gravia ad telluris superficiem secundùm rectas lineas horizonti perpendiculares: proindeque grave aliquod cor- FIG. 63.

pus majore vi descendit per planum verticale, quam per planum inclinatum. Jam verò, quum corpus aliquod grave sursum à potentiâ per planum trahitur; quod potentiæ opponitur, & reluctatur est vis ipsa, qua corpus per planum illud nititur descendere. Itaque major exigitur potentia ad trahendum pondus per planum verticale, quam per planum inclinatum.

Hinc, ut vires plani inclinati possint definiri, determinanda prius est ratio, quam habet gravitas absoluta ad gravitatem relativam, hoc est vis, qua corpus aliquod grave descendere conatur per planum verticale, ad vim, qua idem grave corpus descendere nititur per planum inclinatum. Hunc in finem sequens theorema demonstrandum nobis proponimus: nimirum, quod si grave corpus descendat per planum aliquod inclinatum, gravitas ejus absoluta sit ad gravitatem relativam, ut est longitudo plani inclinati ad ejusdem altitudinem.

FIG. 63. Referat itaque BC planum aliquod horizontale, ad quod inclinetur planum AB; descendat autem per longitudinem ejusdem plani corpus M, & designetur gravitas ejus absoluta per rectam MN, perpendicularem ad horizontem, secundùm quam agit vis illa gravitatis. Itaque demisso super AB perpendiculo NO, poterit vis illa resolvi in

in duas laterales MO, NO. Sed harum virium posterior NO nihil confert ad corporis descensum, quum agat secundùm lineam longitudini plani perpendicularem; & corpus descendit tantùm per vim priorem MO, quippe quæ suam exercet actionem secundùm longitudinem ipsius plani. Quare vis absoluta gravitatis erit ad vim relativam, ut MN ad MO, hoc est propter triangula similia MNO, ABC, ut longitudo plani inclinati AB ad ejus altitudinem AC.

Hinc si fuerint plura plana inclinata AB, DB ejusdem longitudinis; vires, quibus grave aliquod corpus per plana illa descendere nititur, erunt, ut altitudines eorum planorum AC, DE. Nam vis absoluta gravitatis illius corporis est ad vim, qua nititur descendere per planum AB, ut est AB ad AC. Et similiter vis absoluta gravitatis ejusdem corporis est ad vim, qua nititur descendere per planum DB, ut est DB, sive AB ad DE. Quare ex æquali ordinando vis, qua corpus nititur descendere per planum AB, erit ad vim, qua descendere conatur per planum DB, ut est AC ad DE. Ex quo patet, vires illas non esse inter se in ratione angulorum, quibus plana ad horizontem inclinantur, sed in ratione sinuum illorum angulorum. Patetque etiam, quod sicuti vis, qua corpus nititur descendere, est FIG. 64.

maxima; quum planum est verticale, sic etiam sit minima, & prorsus evanescat, quum planum horizontale est.

Fig. 63. Hinc etiam, si pondus M super longitudine plani inclinati AB sustineatur à potentiâ Q secundùm directionem MR, quæ ipsi AB sit parallela; erit pondus M ad potentiam Q, ut longitudo plani AB ad altitudinem ejus AC. Nam potentia Q, quum agat in pondus M secundùm lineam MR parallelam ipsi AB, adæquabit vim, qua grave corpus M nititur descendere per longitudinem AB. Quare pondus M ad potentiam Q erit, ut gravitas absoluta ad gravitatem relativam; atque adeo ex ostensis, ut longitudo plani inclinati AB ad altitudinem ejus AC. Ex quo patet, momentum potentiæ Q, sustinentis pondus M super longitudine plani inclinati AB, augeri posse, non modò auctâ potentiâ ipsâ, verùm etiam diminutâ plani altitudine AC.

Verumtamen, si potentia Q, sustinens pondus M super plano inclinato AB, agat secundùm directionem MK horizonti parallelam; eo casu erit, ut potentia Q ad pondus M, ita altitudo plani AC ad basim ejusdem BC. Etenim, si vis absoluta ipsius potentiæ Q exponatur per rectam MT, ductâ quidem TS ipsi MR perpendiculari, resolvetur vis illa MT in duas alias vires late-

ra-

rales MS, TS. Sed harum virium sola prior MS impedit descensum corporis in plano, quum agat secundùm lineã lõgitudini plani parallelam; altera verò TS descensui nequaquam opponitur, utpote quæ directè corpus versus ipsum planum impellit. Itaque vis absoluta potentiæ Q erit ad vim, qua impedit descensum corporis in plano, ut MT ad MS, sive etiam ut AB ad BC. Jam verò vis, qua potentia Q impedit descensum corporis in plano, æqualis est vi, qua idem corpus per planum illud nititur descendere; & vis ista est ad pondus absolutum ejusdem corporis, ut AC ad AB. Igitur erit ex æquali perturbando, ut vis absoluta potentiæ Q ad pondus absolutum corporis M, ita altitudo plani AC ad ejusdem basim BC.

Atque hæc de viribus, quibus retinentur pondera super planis inclinatis. Videamus modò quæ leges observentur in descensu gravium per eadem plana in hypothesi, quod vis gravitatis agat in corpora gravia eâdem, & constanti ratione. Et quidem tametsi vis gravis descendentis per planum aliquod inclinatum minor sit vi suâ absolutâ, qua agente rectâ descenderet; nihilominus, quemadmodum motus gravis rectâ descendentis est æquabiliter acceleratus, & æqualibus temporibus æqualia ei semper

accedunt velocitatis incrementa; ita quoque, quum grave corpus per planum aliquod inclinatum descendit, accelerabitur inter descendendum uniformiter, ejusque velocitas pro ratione temporis semper augebitur.

Descendat etenim grave corpus M per planum inclinatum AB. Ostendendum est igitur, motum ejus in hoc descensu esse æquabiliter acceleratum, vel quod idem est, æqualibus temporibus æqualia ei semper accedere velocitatis incrementa. Nam per ea, quæ paulò ante ostensa sunt, vis, qua corpus grave M conatur descendere per planum inclinatum AB, est ad vim suam absolutam in datâ ratione, scilicet, ut altitudo plani AC ad longitudinem ejusdem AB. Itaque quemadmodum vis absoluta gravitatis eâdem semper, & constanti ratione agit in corpora; ita quoque eodem semper tenore aget vis illa, qua ipsum corpus M descendere nititur per planum inclinatum AB. Quocirca, quemadmodum gravi rectà descendenti, propter constantem gravitatis actionem, æqualibus temporibus æqualia semper accedunt velocitatis incrementa; ita quoque necesse est, ut velocitas gravis obliquè descendentis augeatur pro ratione temporis, quum similiter ad descensum urgeatur à vi, cujus constans, & uniformis est actio.

Ex

Ex eo autem, quod descensus gravis per planum utcumque ad horizontem inclinatum sit motus æquabiliter acceleratus, sequitur, ut quæcumque de spatiis, quæ à gravi rectâ descendente describuntur, superiùs ostensa sunt, eadem vera sint quoque de spatiis, quæ percurruntur à gravi descendente per planum aliquod utcumque ad horizontem inclinatum. Itaque primò spatia, quæ grave corpus descendens per planum inclinatum describit, computata ab initio descensus, sunt, ut quadrata temporum, quibus describuntur. Unde secundò si tempora ab initio sint, ut numeri naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c., spatia descripta iis temporibus, ab initio semper computata, erunt, ut quadrata numerorum naturalium. Adeòque tertiò, si tempora sumantur æqualia, spatia æqualibus hisce temporibus descripta, erunt ut numeri impares ab unitate se consequentes. Et quartò demum spatium percursum à gravi in dato tempore dimidium est ejus, quod in eodem tempore velocitate finali æquabiliter describeretur.

Quum itaque leges descensus per plana inclinata eædem sint cum legibus descensus per plana verticalia; facile erit inquirere, num ea omnia, quæ à Nobis ostensa sunt, cum experientiis conveniant. Nam, etsi in

descensu verticali non ita facile sit experimenta instituere, quum in eo pernicitas motus accuratis observationibus locum non relinquat; attamen in planis non admodum declivibus facile erit rei periculum facere, quum motus haud admodum veloces exactè in iis mensurari queant. Cæterùm in experimentis capiendis aeris resistentia nonnihil aberrare facit; verum hoc eò minus, quò corpora plus gravitatis pro superficiei magnitudine continent, quòque in minoribus spatiis periculum facimus. Sed & planum, per quod descendit grave corpus, quàm fieri potest politum esse debet, ut ejus motus super eo nullâ scabritie impediatur.

Ut doctrinam de descensu gravium ulteriùs cum Galilæo prosequamur, placet descensum gravium obliquum conferre cum descensu eorundem gravium verticali. Hùjus autem comparationis theorema fundamentale in primis ostendemus: scilicet, quod si grave corpus descendat per planum aliquod, utcumque ad horizontem inclina-
Fig.65. tum AB, velocitas, quam in dato tempore acquirit, sit ad velocitatem, quam acquireret eodem tempore, si rectâ descenderet, ut est altitudo plani AC ad ejusdem longitudinem AB.

Nam incrementa velocitatum, quæ in gra-

gravibus descendentibus per plana AB, AC eodem tempore indefinitè parvo producuntur, sunt ut vires, quibus urgentur. Sed vires istæ sunt inter se, ut AC ad AB. Quare in eâdem hac ratione erunt incrementa illa velocitatum. Est autem hæc ratio ubique eadem, & constans. Itaque summa incrementorum unius gravis erit ad summam incrementorum alterius in eâdem ratione: proindeque velocitas, quam grave corpus in dato tempore acquirit super AB, erit ad velocitatem, quam acquirit eodem tempore super AC, ut est AC ad AB.

Ex hoc autem theoremate plura quidem ad rem nostram spectantia deducuntur: nempe primò, quod si portio plani inclinati AD eodem tempore percurratur à gravi, quo perpendiculum AC, tres rectæ lineæ AB, AC, AD sint in continuâ proportione. Nam velocitatibus acquisitis in punctis C, & D percurruntur eodem tempore æquabiliter dupla ipsarum AC, AD. Quare, quum spatia motu æquabili eodem tempore percursa sint, ut velocitates, quibus percurruntur; erunt velocitates acquisitæ in punctis C, & D, ut dupla ipsarum AC, AD, sive etiam ut ipsæ longitudines AC, AD. Jam verò eædem velocitates, utpote eodem acquisitæ tempore sunt inter se, ut AB ad AC. Itaque erit ex æquali, ut AB

ad

ad AC, ita AC ad AD.

Viciſſim autem per impoſſibile facile erit oſtendere, longitudines AC, AD eodem tempore percurri, ſi ſint continuè proportionales tres rectæ lineæ AB, AC, AD. Unde, quemadmodum ſi quæratur portio plani inclinati AD, quæ percurratur eodem tempore, quo perpendiculum AC, invenitur ea, demittẽdo ſuper AB perpendicularem CD; ita quoque ſi quæratur perpendiculum AC, quod deſcribatur eodem tempore, quo portio plani inclinati AD, habebitur erigendo ſuper AB perpendicularem DC. Ex quo etiam datis duobus planis inclinatis AB, AE facilè erit ſuper AE invenire portionem AG, quæ percurratur eodem tempore, quo portio AD alterius plani: nimirum ſi erectâ ſuper AB perpendiculari DC plano verticali occurrente in C, demittatur ex C ſuper AE perpendicularis altera CG.

Fig. 66. Atque hinc ſequitur ulteriùs, quod ſi circuli ADC ad horizontem erecti ex puncto ſupremo A demittantur quotcumque plana inclinata AB, interceptæ ipſorum portiones AD eodem tempore percurrantur, quo percurritur diameter verticalis AC, quæ eſt communis eorum omnium planorum altitudo; quandoquidem junctis rectis CD, quia anguli ADC, velut in ſemicircu-

culo exiſtentes, ſunt recti, erunt rectæ illæ CD ipſis planis AB perpendiculares. Unde ſi fuerit circulus alter AEF, qui contingens priorem in A, ſecet eadem plana inclinata AB in punctis E, diametrum verò verticalem AC in puncto F, fiatque motus initium à puncto ſupremo A; planorum portiones utroque circulo interceptæ DE percurrentur eodem tempore, quo portio diametri verticalis CF, inter utrumque quoque circulum comprehenſa.

Sed non modò portiones planorum exeuntium ex puncto circuli ſupremo percurruntur eodem tempore, quo communis omnium altitudo, ſive diameter ad horizontem erecta; verùm etiam portiones planorum, quæ ad punctum imum terminantur. Maneat ſiquidem, ut priùs, circulus ADC ad horizontem erectus, & per punctum infimum C tranſeant plura plana inclinata DB. Oſtendendum eſt igitur interceptas ipſorum portiones DC eodem tempore percurri, quo diameter AC. Id autem abundè liquet; nam completis parallelogrammis AB, quemadmodum recti ſunt anguli ADC, ita quoque recti erunt anguli DCB iis alterni: adeòque portiones DC percurrentur eodem tempore, quo perpendicula DB. Eſt autem unumquodque ipſorum æquale diametro AC: Quare eædem por- FIG. 67.

portiones DC percurrentur eodem tempore cum diametro AC.

Consequitur etiam ex ostensis, tempus
Fig.65. descensus per planum aliquod inclinatum AB esse ad tempus descensus per altitudinem ejus plani AC, ut sunt ipsæ longitudines AB, AC. Nam demissâ super AB perpendiculari CD, percurretur abscissa portio AD eodem tempore, quo altitudo AC. Sed tempora descensus per longitudines AB, AD sunt in ipsarum AB, AD ratione subduplicatâ, hoc est propter continuè proportionales AB,AC,AD,ut est AB ad AC. Itaq; tẽpus descensus per AB erit ad tempus descensus per AC, ut est AB ad AC. Ex quo facile colligi potest, quod si plura fuerint plana inclinata, eandem altitudinem habentia, tempora descensus per plana illa sint, ut ipsæ planorum longitudines.

Consequitur demum, velocitatem acquisitam in descensu per AB esse ad velocitatem acquisitam in descensu per AC in ratione æqualitatis. Nam demissâ adhuc super AB perpendiculari CD, propter spatia AC, AD, quæ eodem tempore percurruntur, velocitas acquisita in descensu per AD erit ad velocitatem acquisitã in descensu per AC,ut est AC ad AB.Jam verò velocitas,quæ acquiritur in descensu per AD, est ad velocitatem, quæ acquiritur in descensu per

AB,

AB, ut est tempus per AD, sive AC ad tempus per AB, hoc est ut AC ad AB. Itaque velocitas acquisita in descensu per AC æqualis erit velocitati, quæ acquiritur in descensu per AB. Ex quo haud difficile erit inferre, velocitates gravium finales per diversa plana descendentium æquales esse inter se, quum ex eâdem altitudine ad eandem lineam horizontalem gravia perveniunt.

CAP. III.

De descensu gravium per plura plana contigua; ubi etiam de casu eorundem per plana curvilinea.

Consideravimus huc usque descensum gravium per unum, idemque planum, idque tum rectum ad horizontem, tum ad eum utcumque inclinatum; sed fieri quoque potest, ut grave corpus descendat vi gravitatis per plura plana contigua, quæ connectantur quidem inter se, sed diversimodè ad horizontem inclinentur. Itaq; quæ sint leges descensus per hujuscemodi plana hoc alio capite oportet expendamus: quibus equidem cognitis, innotescent quoque nobis leges descensus per plana curvilinea, quippe quæ considerari possunt velut composita ex infinitis planis rectilineis indefinitæ parvitatis. Et

Et quidem Galilæus, aliique quamplures ſuppoſuerunt, concurſum planorum non impedire motum gravis deſcendentis, ſed tantùm ipſius directionem mutare. Unde crediderunt, quod ſi grave corpus deſcendat

Fig.68. per plura plana contigua AB, BC, CD continuato motu, ſemper eandem in fine velocitatem acquirat, ac ſi deſcenderet ex pari altitudine DE. Nam continuatis planis uſque donec conveniant cum lineâ horizontali AG in punctis F, & G, quia in B eadem acquiritur velocitas, deſcendendo grave per AB, ac ſi deſcendiſſet per FB, erit velocitas acquiſita in C, deſcendendo per AB, BC tanta, quanta acquiritur in deſcenſu per FC, ſive GC; atque adeò velocitas acquiſita in D, deſcendendo per AB, BC, CD, eadem quoque erit, ac ſi deſcendiſſet corpus per GD, ſive DE.

Atque hinc in definiendo tempore deſcenſus per ſecundum planum BC, conſiderarunt grave corpus velut dimiſſum ex pũcto F, in quo planum illud occurrit lineæ horizontali AG: adeò quidem, ut inventâ inter FB, FC mediâ proportionali FH, & deſignato tempore deſcenſus per planum primum AB per ipſam AB, debeat BH deſignare tempus deſcenſus per planum ſecundum BC. Nam eo ipſo, quod AB deſignat tempus deſcenſus per AB, deſignabit FB tempus de-

descensus per FB. Sed tempus per FB est ad tempus per FC in subduplicatâ ratione ipsarum FB, FC, hoc est ut FB ad FH. Itaque exprimet FH tempus descensus per FC; atque adeò BH tempus descensus per BC.

Nec dissimiliter determinarunt tempus descensus per planum tertium CD: nimirum considerando grave corpus velut dimissum ex puncto G, in quo planum illud secat lineam horizontalem AG, & ductâ HI ipsi AC parallelâ, faciendo, ut GL quadratum sit ad GI quadratum, veluti est GC ad GD. Nam designato per AB tempore descensus per ipsum planum primum AB, designabit FB tempus descensus per FB, FH tempus descensus per FC, GI tempus descensus per GC, & GL tempus descensus per GD. Unde quemadmodum BH exprimit tempus descensus per planum secundum BC, ita quoque exprimet IL tempus descensus per planum tertium CD.

Speciatim autem, si post descensum per aliquod planum AB, sequatur motus per planum horizontale, in quo describat spatium quodlibet BD; designato tempore descensus per AB mediante ipsâ AB, crediderunt, tempus motus per BD designari posse per semissem ipsius BD. Nam, quum fiat motus horizontalis velocitate acquisitâ in B, sumptâ BC ipsius AB duplâ, erit tem- FIG. 69.

pus

pus descensus per AB æquale tempori motus per BC. Sed tempus per BC est ad tempus per BD, ut BC ad BD, sive etiam, ut AB ad semissem ipsius BD. Itaque in hac eâdem ratione erit etiam tempus descensus per AB ad tempus motus per BD; & propterea designato per AB tempore descensus per AB, designabit semissis ipsius BD tempus motus per BD.

Primus, quem sciam, Petrus Varignonius in Monumentis Regiæ Scientiarum Academiæ Parisiensis anni 1693, & rursus in iis, quæ referuntur ad annum 1704, Mechanicos commonefecit, falsum esse, quod grave corpus in ingressu per planum alterum eandem retineat velocitatem, quam in descensu per planum primum sibi comparavit, quodque adeò descendendo grave corpus continuato motu per plura plana contigua eandem in fine velocitatem acquirat, ac si ex pari altitudine descenderet: simulq; rationē determinavit, quā velocitas in descensu per planum primum acquisita habet ad eam, cum qua ingreditur corpus planum alterum: nempe quod sit, ut radius, sive sinus totus ad sinum complementi ejus anguli, quem mutuo occursu plana constituunt.

Fig. 70. Sint enim AB, BC plana duo contigua, & facto initio motus ex A, descendat grave aliquod corpus continuato motu per ipsa AB, BC.

BC.

BC. Demittatur ex puncto A super BC perpendiculum AD; jamque si AB sit radius, sive sinus totus, erit BD sinus complementi anguli ABD, sive ABC. Ostendendum est igitur, velocitatem, quam grave corpus acquirit in descensu per planum primum AB, esse ad velocitatem, cum qua ingreditur planum alterum BC, ut est AB ad BD.

Nimirum si AB designet velocitatem, acquisitam in descensu per AB, resolvi ea poterit in duas alias laterales AD, BD. Sed harum velocitatum priori AD nequaquam ingreditur grave corpus planum alterum BC, quum urgeat illud directè versus planum. Itaque ingredietur dumtaxat velocitate alterâ BD, eaque tota quanta est hunc effectum producet, utpote quæ pellit corpus secundùm ipsam illius plani longitudinem; adeòque velocitas acquisita in descensu per planum primum AB erit ad velocitatem, cum qua ingreditur corpus planum alterum BC, ut est AB ad BD.

Quum ergo in ingressu per planum alterum BC nequaquam retineat corpus velocitatem acquisitam in descensu per planum primum AB; perspicuum est, fieri nullo pacto posse, ut descendendo corpus continuato motu per plana contigua AB, BC, eandem in fine acquirat velocitatem, ac si descenderet per altitudinem parem AE. Et

par est ratio, quum plana contigua sunt plura, quàm duo; quandoquidem semper verum erit, quod corpus in ingressu per novum planum, nequaquam retineat eandem illam velocitatem, quam descendendo per priora plana sibi comparavit.

Demittatur jam ex puncto D super AB perpendicularis DF. Et quoniam AB est ad BD in subduplicatâ ratione ipsarum AB,BF; erit etiam in hac eâdem ratione subduplicatâ velocitas acquisita in descensu per planum primum AB ad velocitatem, cum qua ingreditur corpus planum alterum BC. Ex quo patet, in ingressu per planum alterum BC tantam corpus retinere velocitatem, quantam sibi comparasset, si utique descendisset per planum FB; quandoquidem velocitas acquisita in descensu per AB est ad velocitatem acquisitam in descensu per FB similiter in subduplicatâ ratione ipsarum AB,FB: proindeque in fine descensus, hoc est in puncto C, eandem habebit velocitatem, ac si descendisset per altitudinem FG.

Itaque corpus descendens per planum primum AB tantam retinebit velocitatem in ingressu per planum alterum BC, quantam sibi comparasset, si utique descendisset per FB. Atque hinc facile modò erit, definire rationem, quam habet tempus descensus per planum primum AB, ad tempus descen-

ſcenſus per planum ſecundum BC, quum per utrumque planum continuato motu corpus deſcendit. Nam tempus per AB ad tempus per FB eſt in ſubduplicatâ ratione ipſarum AB, FB, hoc eſt, ut DB ad FB. Jam verò, ductâ horizontali FH, & poſitâ IH mediâ proportionali inter BH, & CH, oſtenſum eſt tempus per FB eſſe ad tempus, quo corpus continuato motu, & nihil per flexum B ei de velocitate acquiſitâ detracto deſcribit BC, ut eſt FB ad BI. Quare erit ex æquo ordinando, tempus per AB ad tempus, quo continuato motu deſcribitur BC, ut eſt DB ad BI.

Speciatim autem, ſi planum alterum BC fuerit horizontale, & corpus continuato motu utrumque planum deſcribat; erit tempus per AB ad tempus per BC, ut eſt DB ad ſemiſſem ipſius BC. Nam tempus per AB eſt ad tempus per FB in ſubduplicatâ ratione ipſarum AB, FB, hoc eſt, ut DB ad FB. Oſtenſum eſt autem, tempus per FB eſſe ad tempus, quo corpus velocitate acquiſitâ per FB deſcribit æquabiliter BC, ut eſt FB ad ſemiſſem ipſius BC. Quare erit ex æquo ordinando, ut tempus per AB ad tempus, quo continuato motu deſcribitur BC, ita DB ad ſemiſſem ipſius BC. FIG. 71.

Sit BE ſemiſſis iſte. Itaque tempus per AB ad tempus per BC erit, ut DB ad BE; atque

 adeo

adeo componendo tempus per AB erit ad tempus per AB, BC, ut eſt DB ad DE, ſive etiam, aſſumptâ communi altitudine AB, ut eſt rectangulum ABD ad rectangulum ex AB in DE. Jam autem tempus per AB eſt ad tempus per AC, ut eſt AB ad AC, hoc eſt, communem capiendo altitudinem BD, ut eſt rectangulum ABD ad rectangulum ex AC in BD. Igitur ex æquali ordinando tempus per AC erit ad tempus per AB, BC, ut eſt rectangulum ex AC in BD ad rectangulum ex AB in DE, hoc eſt in ratione compoſitâ ex AC ad AB, & ex BD ad DE.

Erigatur jam ex puncto E perpendicularis EG, quæ conveniat cum AB productâ in puncto G. Et quoniam, propter ſimilitudinem triangulorum BDA, BEG, BD eſt ad BE, ut AB ad BG; erit componendo, ut BD ad DE, ita AB ad AG. Oſtenſum eſt autem tempus per AC eſſe ad tempus per AB, BC in ratione compoſitâ ex AC ad AB, & ex BD ad DE. Quare erit etiam tempus per AC ad tempus per AB, BC in ratione compoſitâ ex AC ad AB, & ex AB ad AG; atque adeò in ſimplici illâ ratione, quam habet AC ad AG.

Hinc ſiquidem AC æqualis fuerit AG, tempus deſcenſus per AC æquale erit tempori, quo continuato motu deſcriberentur plana duo AB, BC. Fieri autem poſſe, ut

AC

AC adæquet AG, facilè patebit, si consideremus, locum puncti G esse in hyperbolâ positione datâ. Sectis enim AD, CD bifariam in H, & I, ductisque HM, LN iisdem CD, AD parallelis, dabitur positione hyperbola, quæ habens pro suis asymptotis rectas LM, LN transibit per punctum positione datum C: atqui in istâ hyperbolâ punctum G suum quoque locum habebit.

Etenim, quum CI sit semissis ipsius CD, & CE semissis ipsius BC; erit EI, sive GN semissis reliquæ DB. Jam verò, propter similitudinem triangulorum BDA, BEG, AD est ad EG, sive IN, ut DB ad BE, sive EC. Quare sumptis antecedentium semissibus, erit ut DH, sive LI ad IN, ita EI, sive GN ad EG. Unde, quia componendo LI est ad LN, ut GN ad CI; erit rectangulum LIC æquale rectangulo LNG: proindeque punctum G erit in hyperbolâ, quæ habens pro suis asymptotis rectas LM, LN transibit per punctum C.

Ex eo autem, quod punctum G sit in hujusmodi hyperbolâ, facile erit ostendere, fieri quandoque posse, ut AC adæquet AG. Etenim, si AD minor fuerit, quàm CD, circulus, qui describitur centro A, intervalloque AC, non modò occurret hyperbolæ in puncto C, verùm etiam portionem ejus existentem intra angulum CLN in alio puncto

ſecabit. Unde, ſi fuerit G aliud hoc punctum ſectionis, ob naturam circuli erit AC æqualis AG.

Neceſſe eſt verò, ut AD minor ſit, quàm CD. Nam primò ſi fuerit AD æqualis CD, fiet AC axis hyperbolæ; quia tranſiens per punctum L, biſecabit angulum MLN; atque adeò, quum AC ſit minima omnium linearum, quæ à puncto A ad hyperbolæ perimetrum ducuntur, circulus centro A, & intervallo AC deſcriptus continget hyperbolam in vertice principali C, nec eam ſecabit. Et ſecundò, ſi fuerit AD major, quàm CD, prædictus circulus ſecabit in alio puncto portionem hyperbolæ exiſtentem intra angulum CLM; atque adeò ad eam, quæ exiſtit intra angulum CLN, nulla recta linea duci poterit ex puncto A, quæ ſit æqualis ipſi AC.

Itaque tunc demum AC ipſi AG æqualis eſſe poteſt, quotieſcumque AD minor eſt quàm CD. Sed hoc caſu perſpicuum eſt, fieri quoque poſſe, ut AC major ſit, quàm AG; atque adeò, ut breviori tempore percurrat corpus continuato motu plana duo AB, BC, quàm planum ſolum AC. Ex quo patet, quod quum grave corpus ex puncto ſublimi A deſcendere debet ad punctum C, eſtque AD minor, quàm CD, inveniri ſemper poſſit tale aliud planum AB, ut breviori tempore accedat corpus ad datum locum

per

per plana duo AB, BC, quam per planum solum AC.

Positio autem hujus plani multiplex esse potest; nam si centro A, intervalloque AC circulus describatur, omnes rectæ lineæ, quæ à puncto A ad interceptam intra circulum portionem hyperbolæ ducuntur, minores erunt, quàm AC; adeòque quælibet harum linearum quæsiti plani positionem determinabit. Quod si verò planum AB tale esse debeat, ut accedendo corpus ad datum locum per plana duo AB, BC minus temporis impendat, quàm si per alia duo ejusmodi plana ad eundem locum accederet; perspicuum est, eò rem redire, ut ex puncto A ad hyperbolam CG perpendicularis demittatur, quandoquidem velut minima omnium linearum, quæ à puncto A ad hyperbolæ perimetrum ducuntur, quæsiti plani positionem exhibebit.

Hoc problema de ducendâ rectâ lineâ ex puncto extra hyperbolæ perimetrum dato, quæ hyperbolam ipsam ad rectos angulos offendat, solutionem accepit à Domino de La Hire, mediante ipsâ hyperbolâ datâ, & circuli circumferentiâ: qua in re imitatus est doctissimum Christianum Hugenium, qui idē problema soluit olim in parabolâ intersectione datæ parobolæ,& circuli curcumferentiæ. Verùm solutio Hiriana, utpote ge-

neralis, nonnihil difficilis, & involuta deprehenditur. Unde aliam hìc exhibebimus, quæ nostro casui tantùm accomodata, facilis erit, ac expedita.

Nimirum sit AG recta linea, quæ hyperbolam CG ad rectos angulos secat, & ductâ ad punctum G tangente GO, protrahatur GE usque in R. Quia ergo angulus KGO rectus est, erunt KR, RG, RO continuè proportionales; adeòque erit, ut KR ad RO, sivè LR, ita KR quadratum ad RG quadratum, sive etiam, ita DB quadratum ad AD quadratum. Jam verò, quum DB dupla sit tam ipsius HK, quàm ipsius EI, sive LR, est HK æqualis LR, atque adeò HL æqualis KR. Quare erit, ut HL ad LR, hoc est ut DI ad IE, ita DB quadratum ad AD quadratum. Sunt autem DC, DB dupla ipsarum DI, IE; & consequenter DI est ad IE, ut DC ad DB. Itaque erit ex æquali, ut DC ad DB, ita DB quadratum ad AD quadratum; & propterea DB erit prima ex duabus mediis proportionalibus inter AD, & DC.

Hinc, quum positio rectæ AG determinetur per punctum B, solvetur problema, faciendo, ut recta DB sit prima ex duabus mediis proportionalibus inter AD, & DC. Neq; verò id factu difficile erit per ipsâ hyperbolam datam, & circuli circumferentiam. Nam siqui-

siquidem super rectâ LC velut diametro circulus describatur, hic hyperbolam secabit nō solùm in G, verùm etiam in alio puncto. Unde si ex hoc altero puncto perpendicularis ad asymptotum LN demittatur, erit ista prima ex duabus mediis proportionalibus inter LI, & IC; adeòque ejus duplum dabit primam ex duabus mediis proportionalibus inter AD, & DC.

Itaque, si AC designet tempus descensus per AC, ductâ AG, quæ descriptam hyperbolam secet in G, designabit AG tempus, quo continuato motu describeret corpus plana duo AB, BC. Ex quo liquet, hujusmodi tempus esse semper finitum, quotiescumq; plana duo AB, BC mutuo occursu obliquum angulum cōstituunt, quum recta AG sit semper finitæ magnitudinis. Verum si angulus sub iis planis comprehensus fuerit rectus, tunc ad peragranda plana illa tempus requireretur infinitum; quandoquidem recta AG, velut parallela asymptoto LN, in infinitâ distantiâ occurreret hyperbolæ: id, quod etiam exinde colligi potest, quia quum rectus est angulus ABC, sinus complementi ejus anguli fit nullus, adeòque nulla est etiam velocitas, cum qua ingreditur corpus planum alterum BC.

Verum enim verò, etsi falsum omninò sit, quod grave corpus in ingressu per pla-

num alterum eandem retineat velocitatem, quam in descensu per planum primum sibi comparavit, neque adeò dici possit, quod descendendo grave corpus continuato motu per plura plana contigua eandem in fine velocitatem acquirat, ac si ex pari altitudine descenderet: attamen notante eodem Petro Varignonio res secus se habet, quum agitur de planiscurvilineis;quandoquidem si grave corpus per unum idemque planum curvilineum descendat, nihil velocitatis acquisitæ amittet unquam, eandemque adeò in fine velocitatem retinebit, quam sibi comparasset, si ex pari altitudine rectâ descendisset.

Id autem mirum videri non debet. Colligitur enim ex ipso theoremate generali, quod si grave corpus describat plana duo AB, BC continuato motu, velocitas in descensu per planum primum AB acquisita sit ad velocitatem, cum qua ingreditur corpus planum alterum BC, ut est radius, sive sinus totus ad sinum complementi anguli ABC,sive ABD.Nam quemadmodum, quum angulus ABD rectus est, sinus sui complementi evanescit, atque adeò nulla est velocitas, cum qua ingreditur corpus planum alterum BC; ita quoque quum angulus ABD minuitur in infinitum, sinus sui complementi differt à radio, sive sinu toto quantitate indefinitè parvâ, adeòque illa eadem

FIG. 72.

ferè

ferè velocitate, quam sibi comparavit corpus descendendo per planum primum AB, ingredietur planum alterum BC.

Hunc verò casum sibi locum vindicare in planis curvilineis, perspicuum quidem est; quandoquidem lineæ curvæ non aliter considerari solent à Geometris, quam velut polygona laterum infinitorum, quorum unumquodque sit indefinitè parvum, quæque ita quidem ad se mutuò inclinentur, ut anguli exteriores sint indefinitè parvi: adeoque quum grave corpus descendit per planum aliquod curvilineum, perinde erit, ac si descenderet continuato motu per infinita plana rectilinea indefinitæ parvitatis, quæ mutuò occursu tales augulos constituunt, ut qui iis deinceps sunt, velut indefinitè parvi debeant haberi.

Sed hìc facilè alicui difficultas haud contemnenda orietur: nimirum, quod etsi verissimum sit, grave corpus eâdem ferè velocitate ingredi secundum planum BC, quam sibi comparavit in descensu per planum primum AB, quotiescumque angulus ABD est indefinitè parvus; non hinc tamen colligi possit, quod descendendo idem grave corpus per planum aliquod curvilineum, debeat in fine eandem velocitatem retinere, quam sibi comparasset, si ex pari altitudine descendisset: quum in isto casu non quidem per duo,

sed

ſed per infinita plana rectilinea deſcendat; adeòque, tametſi in unoquoque concurſu eorum planorum exiguum velocitas acquiſita decrementum patiatur; attamen, quia decrementa iſta ſunt numero infinita, ſumma omnium eorum aliquid finitum, & ſenſibile tandem conſtituet.

Verum huic difficultati facile fiet ſatis, ſi conſideremus decrementum, quod patitur velocitas acquiſita in unoquoque concurſu eorum planorum, eſſe infiniteſimam ſecundi generis. Sint enim AB, BC duo ex illiuſmodi planis, ita ut angulus exterior ABD ſit indefinitè parvus. Deſcribatur ex puncto B tamquam centro ſemicirculus CAE, & demittatur ſuper CE perpendicularis AD, quæ propter angulum indefinitè parvum ABD erit itidem indefinitè parva. Itaque velocitas acquiſita in deſcenſu per planum primum AB erit ad velocitatem, cum qua ingreditur corpus planum alterum BC, ut eſt AB ad BD: proindeque, ſi AB deſignet velocitatem acquiſitam in deſcenſu per AB, deſignabit DE decrementum, quod illa patitur in concurſu planorum. Sed DE eſt infiniteſima ſecundi generis, quum propter circulum CD ſit ad AD, ut eſt AD ad DE. Itaque ipſum illud decrementum erit etiam infiniteſima ſecundi generis; adeoque ſumma ex infinitis illiuſmodi decrementis erit

in-

infinitesima generis primi; nec proinde aliquid finitum, & sensibile constituet.

Cæterum, quemadmodum quum grave corpus descendit per planum aliquod curvilineum, nihil de velocitate acquisitâ unquam amittit, adeòque in fine eandem retinet velocitatem, quam sibi comparasset, si ex pari altitudine rectâ descendisset; ita hoc idem obtinet quoque, si corpus continuato motu ex tangente transeat in planum curvilineum, aut vice versâ; quum angulus contactus in curvis omnibus omni angulo acuto rectilineo minor à Geometris ostendatur. Unde colligere pronum est, quod vis, qua grave acceleratur in descensu per aliquam curvam lineam, eadem sit, ac si per tangentem ejus curvæ, aut etiam per aliam rectam lineam tangenti parallelam descenderet.

CAP. IV.

De motu pendulorum per arcus circulares oscillantium.

PEndulum vocatur grave aliquod corpus, quod filo tenuissimo ex puncto aliquo suspenditur, & circa idem fixum, & immobile revolvitur: veluti est grave A, quod ex puncto B suspensum mediante filo FIG. 73.

AB,

AB, itu redituque describit circa idem punctum, tamquam centrum, arcum CAD. Perspicuum est autem huic gravi eundem planè motū accidere, ac si in superficie sphæricâ CAD perfectè durâ, ac levigatâ idem grave corpus moveretur; quandoquidem hìc supponimus, nec aerem pendulorum motui obstare, nec ullam esse frictionem circa centrum rotationis B. Unde ex iis, quæ superius ostensa sunt, facile erit pendulorum per circulares arcus excurrentium affectiones derivare.

Et primò quidem remotis, ut dictum est, omnibus impedimentis pendulum AB eundo, & redeundo continuas oscillationes perficiet in peripheria CAD. Id autem ut meliùs intelligatur, notandum est prius, quod in hypothesi gravitatis constantis, quemadmodum descensus gravium est motus æquabiliter acceleratus, ita ascensus eorundèm gravium est motus æquabiliter retardatus. Nam vis gravitatis continuò, & æqualiter agens, sicuti motum inceptum gravis descendentis æqualibus temporibus æqualiter auget, quum suam exerceat actionem secundùm eandem directionem, qua perficitur motus gravis descendentis; ita vicissim motum inceptum gravis ascendentis minuit semper pro temporis ratione, quum in isto casu agat contra directionem illius motus.

Hinc

Hinc siquidem grave corpus post descensum per planum aliquod BA, sive rectum, sive obliquum ad horizontem, sursum convertat motum suum, ascendet ad eandem, unde venit altitudinem. Nam, quum gravitas eodem semper tenore agat in corpus, sive ascendat, sive descendat; eadem erit ejus efficacia ad corporis velocitatem minuendam in ascensu, quæ est ad ipsam in descensu augendam. Ex quo sequitur, decrementum velocitatis in puncto aliquo E, dum ascendit mobile ab A ad E tantum esse, quãtum fuit incrementum velocitatis acquisitum in descensu ab E ad A; ac proinde eadem erit velocitas in E post ascensum per AE, quæ erat priùs in eodem puncto post descensum per BE. Unde, quum eadem sit demonstratio in omni alio loco, tolletur corpori ascendenti in puncto B velocitas omnis; adeòq; terminus, ad quem mobile ascendendo perveniet, erit illud idem punctum, ex quo priùs descenderat.

Ex ipsâ autem demonstratione perspicuum est, id non modo verum esse, quum vis gravitatis ponitur ubique eadem, & constans, verùm etiam in omni possibili gravitatis hypothesi. Nam semper gravia ascendentia cum velocitatibus ultimò acquisitis successivè omnes velocitatis gradus servabunt in locis illis, in quibus cadendo eos

ac-

acquisiverunt : proindeque semotis omnibus impedimentis ad eam ipsam altitudinem assurgent, ex qua prius descensum inchoarunt. Sed patet quoque, id non solùm sibi locum vindicare, quum corpora rectà in altum feruntur, verùm etiam, quum in curvis quibuscumque ascendunt; enim verò quemadmodum curvitas nihil officit descensui gravium, ita neque etiam potest esse impedimento eorundem ascensui.

Ex quibus modò facile erit ostendere, pendulum AB eundo, & redeundo continuas oscillationes in peripheria CAD perficere debere, quotiescumque nec aer ejus motui obstat, nec circa punctum rotationis B ulla fit frictio. Nam, delato pendulo ad situm BC, & exinde demisso, describet grave descendendo arcum CA, & in puncto A eam habebit velocitatem, quæ acquiritur cadendo per EA. Hac autem velocitate etsi per tangentem in A exire conetur, attamen quum detineatur per filum in peripheriâ CAD, ascendet ope illius velocitatis per arcum AD ad eandem altitudinem, ex qua decidit, scilicet ad punctum D. Unde, quum suâ gravitate rursus incipiat descendere, acquiret in puncto A denuò priorem velocitatem, cum qua ascendet ad C: proindeque ascendendo, & descendendo per arcum CAD continuò pendulum oscillabitur.

Fo-

Forent autem in æternum duraturæ penduli oscillationes, si, ut dictum est, nec aer ejus motui obstaret, nec ulla fieret frictio circa punctum rotationis B. Verùm hisce de caufis, tametsi insensibiliter, minuitur aliquantulum singulis oscillationibus penduli velocitas in puncto infimo A: ex quo fit, ut non ad idem præcisè punctum redeat grave corpus, ex quo priùs discesserat, sed arcus, in quos excurrit continuò, reddantur breviores, donec tandem insensibiles evadant. Unde rectè observavit Vir Eximius Isaac Newtonus in Principiis Philosophiæ Mathematicis, quod ut experimentum pendulorum congruat adamussim cum theoriis de congressu corporum, habenda sit ratio resistentiæ aeris, per quam pendula in descensu retardantur.

Secunda proprietas penduli, per arcus circulares oscillantis, hæc est, quod velocitas ejus in puncto infimo sit, ut subtensa arcus, quem descendendo describit. Sit enim pendulum BA, quod motu suo describat circulum ACDG. Dico, velocitatem acquisitam in descensu per arcum CA esse ad velocitatem acquisitam in descensu per arcum DA, ut est chorda arcus prioris ad chordam arcus alterius. Demittantur namque super BA perpendicula CE, DF; jamque velocitates acquisitæ in descensu per FIG. 74.

V re-

arcus CA, DA illæ eædem erunt, quæ acquiruntur in descensu per altitudines EA, FA. Unde eò res redit, ut ostendamus, velocitatem acquisitam in descensu per EA esse ad velocitatem acquisitam in descensu per FA, ut est chorda arcus CA ad chordam arcus DA.

Id autem ostendetur hac ratione. Quoniam angulus ACG, velut in semicirculo existens, rectus est, erit chorda CA media proportionalis inter AG, & AE: proindeq; quadratum ex CA æquale erit rectangulo EAG. Similiter ostendemus, quadratum ex DA æquale esse rectangulo FAG. Quare erit, ut quadratum ex CA ad quadratum ex DA, ita rectangulum EAG ad rectãgulum FAG. Sed propter communem altitudinem AG, rectangulum EAG est ad rectangulum FAG, ut EA ad FA. Itaque erit ex æquali, ut quadratum ex CA ad quadtatum ex DA, ita EA ad FA. Sunt igitur chordæ CA, DA in subduplicatâ ratione ipsarum EA, FA. Atqui in earundẽ subduplicatâ ratione sunt etiam velocitates, quæ acquiruntur in descensu per ipsas EA, FA. Quare ex æquali velocitates istæ erunt quoque inter se, ut chordæ CA, DA.

Ex hac proprietate illud perspicuum fit, quod si capiantur arcus A1, A2, A3, A4 &c. talis longitudinis, ut eorum subtensæ sint,

sint, ut numeri naturales 1, 2, 3, 4, &c. respectivè; & pendulum diversis viribus sursum impellatur per arcus illos, hoc est ab unâ vi per arcum A1, ab aliâ per arcum A2, atque ita deinceps; quod inquam velocitatetes ab iis viribus pendulo impressæ in puncto A sint in ratione numerorum naturalium. Unde modò facilè erit, machinam conficere, in qua per experimenta pendulorum comprobari possint leges, quæ in congressu corporum observantur.

FIG. 75. Construatur namque triangulum ligneum ABC, & prope angulum A capiantur duo puncta D, & E ita quidem distantia inter se, ut pendula duo DF, EG, quæ ex illis liberè pendent, se mutuò contingant. Tum ex punctis illis D, & E velut centris, intervallisque DF, EG describantur arcus FH, GI, & sumantur tam in arcu FH portiones F1, F2, F3, F4 &c., quàm in arcu GI portiones G1, G2, G3, G4 &c. talis longitudinis, ut earum subtensæ sint, ut numeri naturales 1, 2, 3, 4, &c. respectivè; jamque ope hujus machinæ facilè erit, experientiæ subjicere leges cögressuum, quas superiùs demonstratas exhibuimus.

Etenim si grave F in arcu suo FH ad punctum 5 attollatur, & grave G in arcu suo GI trahatur ad punctum 3, eaque simul demittantur; per quartam pendulorum

in arcus circulares oscillantium proprietatem mox ostendendã perveniẽt simul, & eodem tempore ad puncta infima; & velocitates, quibus sese percutiunt, per proprietatem secundam jam demonstratam, erunt ut nnmeri 5, & 3. Quod si post ictum grave F ascendat in arcu suo FH ad punctum 3, & grave G in arcu suo GI ad punctum 5; concludendum erit, velocitates gravium post congressum esse, ut 3, & 5 respectivè, & motus eorundem esse contrarios, perinde ac erant ante congressum.

Tertia proprietas pendulorum per arcus circulares oscillantium est, quod tempora oscillationum duorum pendulorum in similes arcus excurrentium sint in subduplicatâ raticne suarum longitudinum: nimirum si AB, AC sint duo pendula, quæ suas oscillationes perficiant in arcubus similibus DE, FG; erit tempus oscillationis penduli AB ad tempus oscillationis penduli AC in subduplicatâ ratione ipsarum AB, AC. Id autem ut ostendamus, præmittendum est priùs hoc lemma, quod si duo gravia descendant super duobus, aut pluribus planis proportionalibus, & similiter ad horizontem inclinatis; tempora, quæ in iis percurrendis impenduntur, sint in subduplicatã eorundem ratione.

FIG. 76.

Percurrat etenim grave aliquod plana AB,

AB, BC, quæ sint proportionalia, & similiter ad horizontem inclinata cum planis DE, EF, quæ ab altero gravi percurrantur: ita, ut AB sit ad BC, ut est DE ad EF, ductisque horizontalibus AG, DH æquales sint tum anguli BAG, EDH, tum anguli AGB, DHE. Dico tempus, quo percurruntur plana duo AB, BC, esse ad tempus, quo alia duo plana DE, EF peragrantur, in subduplicatâ ratione longitudinum eorundem planorum. FIG. 77.

Ponamus primò, concursus planorum non impedire motus gravium descendentium, sed tantùm eorundem directionem mutare. Quia igitur triangula ABG, DEH æquiangula sunt, erit ut AB ad BG, ita DE ad EH. Est autem ex hypothesi ut AB ad BC, ita DE ad EF. Quare erit ex æquali, ut BG ad BC, ita EH ad EF; atque adeò componendo, & permutando GC erit ad HF, ut BG ad EH, sive etiam, ut AB ad DE.

Et quoniam plana AB, DE velut similiter ad horizontem inclinata eodem prorsus modo percurruntur, ac si partes essent ejusdē plani; erit tempus per AB ad tempus per DE in subduplicatâ ratione ipsarum AB, DE. Est autem ob eandem rationem in hac eâdem subduplicatâ ratione, tam tempus per GC ad tempus per HF, quàm tempus per BG ad tempus per EH. Quare, quum divi-

 den-

dendo in eâdem adhuc ſubduplicatâ ratione ſit tempus per BC poſt deſcenſum ex G, vel A ad tempus per EF poſt deſcenſum ex H, vel D; erit ex æquali, ut tempus per AB ad tempus per DE, ita tempus per BC ad tempus per EF.

Hinc permutando, componendo, & rurſus permutando erit, ut tempus per AB, BC ad tempus per DE, EF, ita tempus per AB ad tempus per DE. Sed tempus per AB eſt ad tempus per DE in ſubduplicatâ ratione ipſarum AB, DE; & AB eſt ad DE, ut AB, BC ad DE, EF. Igitur ex æquali tempus, quo percurruntur continuato motu plana duo AB, BC, erit ad tempus, quo motu ſimiliter continuato peragrantur alia duo plana DE, EF, in ſubduplicatâ ratione longitudinum ipſorum planorum.

Ponamus ſecundò, concurſus planorum impedimento eſſe motibus gravium, jamque demiſſis ſuper BG, EH perpendicularibus AI, DK, æquiangula adhuc erunt triangula ABI, DEK; adeòque erit, ut AB ad BI, ita DE ad EK. Eſt autem ex hypotheſi, ut AB ad BC, ita DE ad EF. Quare erit ex æquali ut BI ad BC, ita EK ad EF; atque adeò componendo, & permutando IC erit ad KF, ut BI ad EK, ſive etiam, ut AB ad DE.

Unde modò facile erit in hac etiam hypo-

pothesi lemma propositum ostendere. Nam quemadmodum, quum concursus planorum nequaquam impediunt motus gravium, plana BC, EF, perinde percurruntur à gravibus post descensum ex A, & D, ac si descendissent ex G, & H; ita quoque, quum concursus planorum impedimento sunt motibus gravium, eadem plana BC, EF perinde percurrentur post descensum ex A, & D, ac si descendissent gravia ex I, & K.

Idem autem eâdem ratione ostendetur, si plura essent utrobique plana proportionalia, & similiter ad horizontem inclinata. Ex quo illud colligi potest, quod si fuerint duo plana curvilinea DB, FC similia, & similiter posita, tempora descensus per plana illa sint in subduplicatâ ratione suarum longitudinum; quandoquidem plana illa curvilinea considerari possunt, velut infinita numero plana rectilinea indefinitæ parvitatis, proportionalia, & similiter ad horizontem inclinata. Fig. 76.

Atque hinc modò sponte suâ sequitur proprietas pendulorum superiùs posita. Nam, quum arcus DB, FC sint similes, & similiter positi, erit ex ostensis tempus descensus per DB ad tempus descensus per FC in subduplicatâ ratione ipsorum DB, FC, sive etiam DE, FG. Sed tempus descensus per DB est dimidium temporis, quo

perficitur oscillatio integra in arcu DE; atque ita quoque tempus descensus per FC est dimidium temporis, quo in arcu FG integra absolvitur oscillatio. Quare tempus oscillationis penduli AB erit ad tempus oscillationis penduli AC in subduplicatâ ratione arcuum DE, FG, in quibus oscillationes absolvuntur; atque adeò in subduplicatâ ratione ipsarum longitudinum AB, AC; quum propter arcus similes DE, FG, AB sit ad AC, ut est DE ad FG.

Ex hac pendulorum proprietate haud difficile erit, dato numero oscillationum, quæ ab uno pendulo AB notæ longitudinis in dato tempore perficiuntur, invenire numerum oscillationum, quæ ab alio quovis pendulo AC notæ similiter longitudinis in eodem tempore perficientur. Est quippe tempus unius oscillationis reciprocè, ut numerus oscillationum dato tempore peractarum. Ostensum est autem, idem tempus esse, ut longitudo penduli oscillantis subduplicatè. Quare numeri oscillationum, quæ à duobus quibusvis pendulis in dato tempore perficiuntur, erunt in ratione reciprocâ subduplicatâ suarum longitudinum; & propterea si inventâ mediâ proportionali inter AB, & AC, fiat ut media ista ad AB, ita numerus oscillationum penduli AB ad quartum, habebitur numerus oscillationum penduli AC.

Vi-

Viciſſim verò datis numeris oſcillationum, quæ perficiuntur in eodem tempore à pendulis AB, AC, datâque longitudine penduli unius, velut AB, licebit invenire longitudinem alterius penduli AC: nimirum faciendo, ut quadratum numeri oſcillationum penduli AC ad quadratum numeri oſcillationum penduli AB, ita longitudo data AB ad longitudinem quæſitam GD.

Cæterùm hæc pendulorum proprietas, ut liquet ex ipsâ demonſtratione, propriè ſibi locum vindicat, quum oſcillationes fiunt in arcubus ſimilibus. Interim, ſi arcus, in quibus pendula oſcillantur, non ſint nimis magni, obtinebit præter propter proprietas iſta, tametſi arcus oſcillationum non ſint ſimiles: idque ob quartam, & ultimam pendulorum proprietatem, quod ejuſdem penduli vibrationes exiguæ, etſi inæquales, ad ſenſum ſint iſochronæ, ſive æquidiuturnæ.

Sit namque pendulum BA, quod oſcillando deſcribat arcus inæquales CAD, EAF. FIG. 78.
Dico æqualia ferè tempora in illis deſcribendis inſumi, hoc eſt oſcillationem in arcu CAD fieri eodem ferè tempore, quo perficitur oſcillatio in arcu EAF, dummodo arcus illi non ſint nimis magni. Nam, propter exiguitatem arcuum CA, EA, ii nec logitudine, nec declivitate multum à chordis ſuis deflectunt: proindeque grave paria

ferè

ferè insumet tempora, sive per arcus CA, EA, sive per chordas illorum feratur. Sed tempora descensus per eorum arcuum chordas ex superiùs ostensis æqualia sunt. Quare æqualia fere erunt etiam tempora per arcus CA, EA. Sunt autem horum temporum dupla illa, quibus pendulum oscillando describit arcus inæquales CAD, EAF. Igitur & ista quoque tempora ferè æqualia erunt.

Postremam hanc pendulorum proprietatem confirmat etiam experientia. Si enim capiantur pendula duo æqualis longitudinis, eaque ad motum concitentur subinde, ut unum in multò majores excurrat arcus, quàm alterum; comperietur hujusmodi pendula ferè æqualia habere tempora oscillationum: adeò, ut in centum oscillationibus vix erit discrepantia temporis unius oscillationis. Ejusdem autem proprietatis beneficio adhibuit primus omnium Galilæus pendula in observationibus physicis, & astronomicis, quæ accuratam temporis mensuram requirunt; cujus exemplo ductus Hugenius horologia ipsa automata pendulis instruxit, & experientia comprobavit hujuscemodi horologia longe superare priora illa, quorum libratores horizontales erant.

Etsi autem hujusmodi horologia pendulis

lis instructa iis, quæ prius in usu erant, valdè essent accuratiora, quin & aliqua fuissent adeò affabrè elaborata, ut temporis mensuram exhiberent motu Solis multò justiorem, qui monstrat solummodò tempus apparens, ac relativum, non autem verum & absolutum; nihilominus nòn eò res redacta erat, ut exacta temporis mensura haberetur. Quamvis enim ejusdem penduli oscillationes exiguæ fere, & ad sensum sint æquidiuturnæ; quia tamen non sunt omnimodè & geometricè tales, sed majores minoribus sunt aliquantulum diuturniores, erit semper inter singulas oscillationes exigua quædam differentia, ex quibus omnibus differentiolis conflatur tandem differentia satis magna, ut ipsa evincit experientia.

Quocirca, ut pendulorum oscillationes ad omnimodam æqualitatem redigerentur, & tam majorum, quàm minorum tempora perfectè essent æqualia, novum protulit inventum laudatus Hugenius numquam satis commendandum: nimirum, quum demonstraverit, tempora descensus per arcus cycloidis, cujus vertex est punctum imum, inter se æqualia esse; collegit isochronas esse pendulorum oscillationes omnes, si utique non in circumferentiæ circuli, sed in cycloidis arcubus perficerentur. Unde methodum excogitavit, qua mediante posset gra-

ve pendulum per cycloidis perimetrum ferri. Quæ tamen omnia ut meliùs intelligantur à Tyronibus, quibus hæc ſcribimus, præmittenda ſunt priùs nonnullâ de naturâ & proprietatibus cycloidis.

CAP. V.

De naturâ, & proprietatibus cycloidis; ubi etiam de epicycloide, tum internâ, cùm externâ.

UT curvæ, cyclois dictæ, claram diſtinctamque ideam Lectoribus noſtris hoc
Fig. 79. loco exhibeamus, concipiatur in plano aliquo circulus AEB, cujus centrum ſit punctum C; diameter recta AB. Revolvatur circulus iſte ſuper rectâ poſitione datâ DBD, quam in primâ ſui poſitione unâ diametri extremitate A contingat in D, idque uſque donec eidem occurrat pũcto B, diametri extremitate alterâ. Et quoniam circulus prædictus ſuper rectâ illâ duplici motu fertur, uno progreſſivo, & altero circulari; prior diametri extremitas A, ſubiens utrumque motum, deſignabit in eodem illo plano lineam curvam DNA, quæ erit cycloidis pars dimidia. Et ſiquidem idem circulus ſuper eâdem rectâ ulteriùs pergat revolvi, donec integram revolutionem perficiat; habe-

habebitur cyclois integra DAD, cujus basis dicetur recta DD, vertex punctum A, axis recta AB normalis ad basim, & circulus genitor ipse ille, per cujus revolutionem cyclois describitur, quique circa cycloidis axem, velut diametrum, describi solet.

Jam verò ſicuti ex ipsâ curvæ geneſi ultrò liquet, rectam BD, baſim ſemicycloidis AND, æqualem eſſe circumferentiæ ſemicirculi genitoris AEB, ita quoque non obſcurè colligi poteſt, quod ſi ex quovis axis puncto M perpendicularis erigatur MN, portio ejus EN, circumferentiâ, & ſemicycloide comprehenſa, adæquet arcum correſpondentem AE. Nam, ſi ſemicirculus AEB concipiatur perventus ad poſitionem NFB, erit arcus BF æqualis rectæ BF, & arcus FN æqualis rectæ DF. Sed erectâ ex puncto contactus F perpendiculari FG, quia ea tranſit per centrum ſemicirculi C, æquales erunt tam rectæ BC, FC, quàm rectæ CM, CG; & conſequenter æquales etiam erunt tam rectæ ME, GN, quàm rectæ MG, EN. Itaque erit quoque, tum EN æqualis BF, tum chorda FN æqualis chordæ BE; atque adeò æquales etiam inter ſe, tam arcus BE, FN, quàm arcus AE, BF. Eſt autem arcus BF æqualis rectæ BF, ſive EN. Et igitur eadem EN adæquabit quoque arcum AE Fig. 80.

Unde patet, deſcriptæ ſemicycloidis AND hanc

hanc esse proprietatem præcipuam, ut quælibet ejus ordinata MN adæquet arcum correspondentem AE unà cum sinu ejus ME: proindeque circuli rectificatione supposità, facile erit, semicycloidem in plano per puncta describere. Sed patet etiam, cycloidem esse ex numero curvarum, quæ mechanicæ, sive trascendentes, aut geometricè irrationales dicuntur; quandoquidem relatio, quam habet in eâ abscissa AM ad ordinatam correspondentem MN, inveniri nequit, nisi inventâ priùs relatione, quam habet eadem abscissa AM ad arcum correspondentem AE, quæque per æquationem ad infinitas dimensiones ascendentem definitur. Quod exinde quoque colligi potest, quia circulus genitor, completâ suâ primâ revolutione, potest circumvolutiones alias super eâdem rectâ lineâ continuò efficere, atque ita alias, atque alias cycloides in infinitum describere. Etenim, quum omnes istæ cycloides, unicam constituentes curvam lineam, in infinito punctorum numero à rectâ secari possint; erit curva ex iis composita generis infinitesimi, atque adeò localis ejus æquatio ad infinitas dimensiones ascendet.

Fig. 81. Ex præcipuâ autem semicycloidis proprietate sequitur, quod si recta NT contingat cycloidem in N, eique perpendicularis demittatur FN, tangens quidem NT paral-

rallela sit chordæ AE, perpendicularis autem FN parallela chordæ BE. Etenim, si ad circumferentiæ punctum E ducatur tangens TE, quæ conveniat cum NT in puncto T, & concipiatur ordinata alia PQR, priori MN indefinitè proxima, ita ut portiones indefinitè parvæ QE, RN sumi possint, velut portiones tangentium TE, TN; ductâ quidem ex puncto R rectâ RS ipsi TE parallela, erit ob proprietatem cycloidis QE, sive RS æqualis SN, atque adeò TE æqualis EN, quum similia sint triangula TEN, RSN. Unde, quum angulus TEM, tamquam exterior, duplus fiat anguli TNE, idemque propter tangentem DE duplus etiam sit anguli AEM; erit angulus AEM æqualis angulo TNE, & consequenter recta TN ipsi AE parallela erit. Est autem uterque angulorum AEB, TNF rectus. Quare erit etiam angulus BEM æqualis angulo FNE, atque adeo recta FN ipsi BE parallela erit.

Unde modò facile erit, omnes alias cycloidis proprietates, quæ ad ejus rectificationem & quadraturam spectant, derivare. Ordiemur autem à rectificatioue: nempe, quod quælibet cycioidis portio AN dupla sit chordæ correspondentis AE, atque adeò semicycloìs ipsa AND dupla sit diametri circuli genitoris AB. Nam iisdem, ut supra, positis, quum ELRN sit parallelogrammum, erit por-

portio cycloidis indefinitè parva NR æqualis exiguæ rectæ EL. Jam verò propter angulum TEM bisectum per chordam AE, æquicrure est triangulum indefinitè parvum EQL; atque adeò si centro A intervalloque AQ describatur arculus QX, vel quod idem est demittatur ex puncto Q super EL perpendicularis QX, hæc dividet bifariam in X ipsam EL. Itaque eadem cycloidis portio NR dupla erit portionis EX, quæ est differentia chordarum AE, AQ; & consequenter, quum hæc ratio dupla inveniatur, quocumque in loco capiatur ordinata MN, erunt singulæ portiones indefinitè parvæ, ex quibus componitur portio cycloidis AN, duplæ singularum differentiarum, quæ inter chordas correspondentes existunt. Unde facilè erit colligere, ipsam cycloidis portionem AN duplam esse chordæ correspondentis AE; nam quum ultima chorda evanescat, omnes illæ chordarum differentiæ simul sumptæ priorem AE adæquabunt.

Ostensâ cycloidis rectificatione, ad ejus quadraturam gradum facimus, circa quam plura à Geometris theoremata sunt inventa. Et primo iisdem, ut suprà, semper manentibus, si compleatur rectangulum AMNK, erit spatium cycloidale externum ANK æquale spatio circulari correspon-

Fig. 81.

den-

denti AEM. Nam si per punctum R ducatur recta IO, axi AB parallela, triangula RON, AME similia fient inter se; eritque adeò, ut RO, sive PM ad ON, ita AM, sive KN ad ME. Quare erit rectangulum KNO æquale rectangulo PME; & propterea, quia ab hisce rectangulis non differunt sensibiliter areolæ KNRI, PMEQ, erit etiam areola KNRI æqualis areolæ PMEQ. Sed hæc areolarum æqualitas reperitur quocumque in loco ducatur ordinata MN. Itaque componendo erit totum spatium cycloidale externum ANK æquale spatio circulari correspondenti AEM.

Jam completo rectangulo ABDH, ob eandem rationem erit totum spatium cycloidale externum ADH æquale semicirculo AEB. Unde, quia rectangulum ABDH, veluti factum ex diametro semicirculi AB in circumferentiam ejus AEB, est quadruplũ ipsius semicirculi; erit spatium cycloidale internum ADB triplum semicirculi genitoris AEB. Ex quo sequitur, spatium cycloidale intermedium duplum esse ejusdem semicirculi, vel etiam æquale semicirculo genitori AEB unà cum spatio cycloidali externo ADH.

Præterea, si compleatur rectangulum ABGK, quia istud fit ex AB in MN, hoc est ex AB in ME, & ex AB in EN, sive ar-

cum AE, estque rectangulum ex AB in ME quadruplum trianguli BCE, & rectangulum ex AB in arcum AE quadruplum sectoris ACE; erit idem rectangulum ABGK quadruplum segmenti circularis ABE, ad chordam BE terminati. Unde, quia spatium cycloidale externum ANK est æquale spatio circulari correspõdenti AEM, & triangulum NFG est æquale triangulo BEM; his hinc inde ablatis, supererit spatium cycloidale internum ABFN terminatum ad rectam FN triplum segmenti circularis ABE, quod ad chordam BE terminatur; atque adeò reliquum spatium cycloidale internum DNF triplum quoque erit reliqui segmenti circularis BEB.

Ex quibus omnibus jam liquet, quadraturam indefinitam spatii cycloidalis tam interni, quàm externi ex circuli quadraturâ pendere, & nonnisi eâ suppositâ posse exhiberi. Sed nihilominus dantur nonnullæ portiones spatii cycloidalis interni absolutè quadrabiles. Nam primò, quum ostensum sit, spatium cycloidale internum ABFN triplum esse segmenti circularis correspondentis ABE, si ponamus AB quadruplam esse ipsius AM, fiet hoc casu parallelogrammum EF triplum sectoris correspondentis ACE, atque adeò spalium cycloidale internum ABEN triplum trianguli BEC.

BEC. Et secundò, quia spatium cycloidale externum ANK ostensum est æquale spatio circulari correspondenti AEM, si ponamus ordinatam MN occurrere axi cycloidis AB in ipso centro C, ita ut fiat rectangulum totum AN æquale quadrato radii AC, unà cum duplo quadrantis ACE, erit spatium cycloidale intermedium AEN æquale quadrato radii AC.

Horum spatiorum, quorum valor independenter à quadraturâ circuli invenitur, primum exhibuit Hugenius, alterum notavit Leibnitius. Sed infinita alia protulit Geometra insignis Johannes Bernoullius in suo Schediasmate, quod anno 1699 inseruit Monumentis Regiæ Scientiarum Academiæ Parisiensis, quorum quidem spatiorum nonnisi casus sunt speciales spatia illa, quæ Hugenius, & Leibnitius consideràrunt. Sunt autem hæc spatia Bernoulliana duplicis speciei. Etenim si in radio AC capiantur duo quævis puncta P, & M, ab ipsis A, & C æqualiter distantia, & ducantur ordinatæ MN, PR sive ad eandem, sive ad partes contrarias; exhibet laudatus Geometra quadraturam, tam spatii cycloidalis interni AMR, quàm segmenti cycloidalis RNR à rectâ NR, & cycloide ipsâ comprehensi; illud nimirum ostendendo æquale triangulo BPQ; hoc verò æquale differentiæ triangulorum BPQ, BME. FIG. 82.

Et quidem quod attinet ad primum, nempe quod ſpatium cycloidale internum AMR æquale ſit triangulo BPQ, oſtendemus illud in hunc modum. Quoniam AP, CM ex hypotheſi ſunt æquales, erit ſemiſumma rectarum AP, AM æqualis dimidio radii AC: proindeque trapetium AMRI, quum fiat ex ſemiſummâ rectarum AP, AM in rectam AI, ſive PR, erit æquale rectangulo, quod fit ex dimidio radii AC, & ordinatâ PR; ſive etiam duobus rectangulis, quorum alterum fit ex dimidio radii AC in rectam PQ, alterum ex dimidio radii AC in arcum AQ; hoc eſt triangulo BCQ, & ſectori ACQ ſimul ſumptis; ſive etiam ſoli ſegmento circulari ABQ. Eſt autem ſpatium cycloidale externum ARI æquale ſpatio circulari corrreſpondenti APQ. Itaque hiſce ablatis, erit reliquum ſpatium cycloidale internum AMR æquale triangulo BPQ.

Quod verò ſpectat ad ſecundum, nempe quod ſegmentum cycloidale RNR, à rectâ NR, & cycloide ipsâ comprehenſum ſit æquale differentiæ triangulorum BPQ, BEM, demonſtrari poteſt illud hac ratione. Quoniam ſemiſumma rectarum AP, AM eſt æqualis dimidio radii AC, erit trapetium RNKI æquale rectangulo, quod fit ex dimidio radii AC in differentiam ordinatarum MN, PR. Sed per naturam cycloidis hu-

hujusmodi ordinatarum differentia est æqualis arcui intercepto QE unà cum differentiâ rectarum ME, PQ. Igitur, quia rectangulum ex dimidio radii AC in arcum QE est æquale sectori CQE, & rectangulum ex dimidio radii AC in differentiam rectarum ME, PQ est æquale differentiæ triangulorum BCE, BCQ; erit idem trapetium RNKI æquale sectori CQE unà cum differentiâ triangulorum BCE, BCQ, sive etiam soli spatio circulari BEQ: proindeque, quum segmentum spatii cycloidalis externi IRNK sit æquale spatio circulari correspondenti PQEM; erit reliquum segmentum cycloidale internum RNR æquale differentiæ spatiorum circularium BEQ, PQEM, & consequenter differentiæ triangulorum BEM, BPQ.

Sed notandnm hoc loco est, quod si ordinatæ PR, MN ad contrarias partes ducantur, eo casu spatium cycloidale internum, quod cum ipsâ cycloide comprehendit recta NR, non quidem differentiam, sed summam adæquet triangulorum BEM, BPQ. Nec dissimilis est hujus rei demonstratio à præcedente. Etenim, quum semisumma rectarum AP, AM sit æqualis dimidio radii AC, erit trapetium RNKI æquale rectangulo, quod fit ex dimidio radii AC in summam ordinatarum MN, PR. Sed per natu-

ram cycloidis summa ordinatarum MN, PR est æqualis arcui intercepto QAE unà cum summa rectarum ME, PQ. Igitur, quia rectangulum ex dimidio radii AC in arcum QAE est æquale sectori CQAE, & rectangulum ex dimidio radii AC in summam rectarum ME, PQ est æquale duobus triangulis BCE, BCQ simul sumptis; erit idem trapetium RNKI æquale sectori CQAE unà cum duobus triangulis BCE, BCQ, hoc est toti spatio circulari BQAE: proindeque, quum spatia cycloidalia externa ARI, ANK ostensa sint æqualia spatiis circularibus correspondentibus AQP, AEM; erit reliquum spatium cycloidale internum NAR æquale summæ triangulorum BME, BPQ.

Ad instar cycloidis aliam curvam lineam consideraruntt Geometræ, quam epicycloidem appellarunt, utpote quæ ortum habet ex revolutione circuli super circulo alio immobili. Sit itaque DAD curva ista, quæ nempe describitur per punctum A, dum circulus AEB revolvitur super altero immobili DBD. Habeat autem circulus mobilis AEB positionem talem, ut recta AB, quæ ducitur ex puncto describente A ad punctum contractus B transeat per utriusque circuli centra C, & O. Et siquidem ex puncto O, tamquam centro, & intervallo quovis describatur arcus EN, proprietas de-

FIG. 83.

descriptæ curvæ principalis erit, ut arcus AE sit ad arcum EN, velut est radius OB ad dium OE, sive ON.

Nam, si semicirculus AEB intelligatur ad eam positionem perventus, ut circulum alium immobilem contingat in puncto F, & punctum describens A incidat super puncto N; quia recta OF producta transit per centrum C, atque adeò triangula NOC, EOC habent singula latera singulis lateribus æqualia, erit angulus NOF æqualis angulo BOE, & consequenter angulus NOE æqualis angulo BOF. Unde, quum similes sint sectores BOF, EON, erit ut arcus BF ad arcum EN, ita radius OB ad radium OE. Sed per genesim ipsius curvæ arcus circuli immobilis BF est æqualis arcui circuli mobilis BF, sive AE. Igitur erit, ut arcus AE ad arcum EN, ita radius OB ad radium OE. Ex quo patet, quod si centrum O abeat in infinitum, ita ut arcus concentrici BF, EN evadant lineæ rectæ, ipsaque curva AND cyclois ordinaria; quia hoc casu radii OB, OE fiunt æquales, erit etiam arcus AE æqualis ipsi EN, quæ est proprietas principalis prædictæ cycloidis.

Ex eo autem, quod proprietas præcipua epicycloidis sit, ut arcus AE sit ad arcum EN, velut est radius OB ad radium OE, facile erit epicycloidem in plano per puncta

describere : scilicet, si constituto ad centrum C angulo quovis ACE, fiat ad centrum O angulus alter EON, qui sit ad illum, ut est radius AC ad radium OB, & ex puncto O tamquam centro, intervalloque OE describatur arcus EN, qui secet rectam ON in puncto N. Nam, quum arcus AE sit ad arcum EN in ratione compositâ ex angulo ACE ad angulum EON, & ex radio AC ad radium OE, sitque ex constructione angulus ACE ad angulum EON, ut est radius OB ad radium AC; habebit idem arcus AE ad arcum EN rationem compositam ex radio OB ad radium AC, & ex radio AC ad radium OE, adeòque rationem simplicem, quam habet OB ad OE; & consequenter punctum N erit in epicycloide quæsitâ.

Unde liquet, epicycloidem non esse semper mechanicam, ac naturæ trascendentis. Nam primò est geometrica, quum circulus mobilis AEB æqualis est circulo immobili DBD: etenim, quum in hoc casu æquales etiam sint radii AC, OB, invenientur epicycloidis puncta omnia semper geometricè, nimirum faciendo angulum EON æqualem angulo ACE. Et secundò est etiam naturæ geometricæ, quotiescumque radii AC, OB non quidem sunt æquales, sed rationem habent ejusmodi, quæ numeris exprimi possit: quippe tametsi hoc casu ad invenienda

ipsius

ipsius puncta omnia, fieri debeat angulus EON, qui sit ad angulum ACE, non quidem in ratione æqualitatis, sed ut est radius AC ad radium OB; attamen id semper fieri potest beneficio alicujus curvæ geometricæ, quotiescumque ratio radiorum AC, OB in numeris exhibetur.

Itaque reliquum est, epicycloidem DAD tunc demum esse machanicã, ac naturæ trascendentis, quum ratio radiorum AC, OB nullis numeris exprimi potest. Nam, ut omnes Geometræ norunt, angulum constituere, qui ad alium angulum rationem habeat incommensurabilem, est problema mechanicum, nec ullis lineis geometris perfici potest. Quod exinde etiam colligere licet, quia existente incommensurabili ratione radiorum AC, OB, est etiam incommensurabilis proportio circumferentiarum: proindeque, si circulus genitor, ac mobilis AEB, completâ primâ revolutione, intelligatur adhuc revolvi super circumferentiâ alterius circuli immobilis DBD, ut faciat secundam, tertiam, quartamve revolutionem, numquam perveniet ad primum illud punctum, unde cæperat moveri, describetque adeò lineam curvam, quam recta linea in infinitis numero punctis secabit.

Quemadmodum autem ex commensurabilitate, aut incommensurabilitate rationis, quæ

quæ eſt inter radios circulorum AC, OB, fit ut ipſa epicycloïs DAD modò ſit geometrica, modò mechanica; ita quoque pro triplici diversâ ratione, quæ inter eoſdem radios eſſe poteſt, fit, ut eadem curva tres diverſas configurationes habere poſſit. Nam primò, ſi ratio illa ſit æqualitatis, ita nempe
Fig. 83. ut æquales ſint radii AC, OB; quia æquales ſunt etiam ipſorum circulorum circumferentiæ, circulus mobilis revolutione ſuâ emetietur integram circumferentiam circuli immobilis: proindeque quum in fine revolutionis incidat in illud idem punctum, unde cæperat moveri, figura epicycloidis ſpatium claudet, ejuſque partes in cuſpidem ſurſum ſpectantem conjungentur. Quod ſi verò ratio illa fuerit majoris inæqualitatis,
Fig. 84. ſubinde ut radius AC major ſit radio OB; quia circumfetentia circuli mobilis major erit quoque circumferentiâ circuli immobilis, ipſe circulus mobilis revolutione ſuâ non modò emetietur integram circumferentiam circuli immobilis, verùm etiam aliquam ejus portionem; & propterea, quia in fine revolutionis incidit ultra punctũ, unde cæperat moveri, epicycloïs non modò claudet ſpatium, ut in primo caſu, ſed habebit quoq; aliam parvam ovalem dimidiatam, cuſpidi inhærentem, eritque adeò figura nodata. Ac denique ſi eadem illa ratio fuerit minoris

inæqualitatis, ita ut radius AC minor fit Fig. 85.
lio OB; quia circumferentia circuli mobi-
minor quoque erit circumferentiâ circu-
immobilis, ipse circulus mobilis integrâ
volutione suâ dumtaxat partem aliquam
cumferentiæ circuli immobilis emetie-
r, atque adeò epicyclois ambitu suo spa-
im non claudet.

Hanc epicycloidem vocant Geometræ ex-
nam, ad differentiam alterius epicycloi-
s, quam appellant internam; utpote quæ
circuli intra circulum revolutione suam
nesim trahit. Habet autem hæc altera epi-
clois eandem omnino proprietatem cum
icycloide externâ. Sit enim AND epicy- Fig. 86.
ois descripta ex revolutione semicirculi
EB super concavitate arcus BD, cujus cen-
um est punctum O, & concipiatur ipse se-
icirculus AEB perventus ad eā positionem,
contingat in F arcum BD, punctumque
scribens A incidat super puncto N. Et
ioniam, junctâ rectâ OF, hæc transit per
ntrum semicirculi C, fit hinc, ut descri-
o ex puncto O velut centro arcu EN, sint
nilia, & æqualia tam triangula OCN,
CE, quàm triangula OFN, OBE: proinde-
ue, quum æquales sint anguli BOE, FON,
ldito communi EOF, erunt etiam æquales
nguli BOF, EON: & propterea, quia similes
int sectores OBF, OEN, erit ut arcus BF
ad

ad arcum EN, ita radius OB ad radium OE. Jam verò per ipſam curvæ geneſim arcus circuli immobilis BF eſt æqualis arcui circuli mobilis FB, ſive AE. Igitur erit etiam, ut arcus AE ad arcum EN, ita radius OB ad radium OE, quæ eſt etiam proprietas principalis epicycloidis externæ.

Hinc epicyclois internâ eâdem planè ratione in plano per puncta deſcribetur, ac epicyclois externa, nimium ſi conſtituto ad centrum circuli mobilis C angulo quovis ACE, fiat ad centrum circuli immobilis O angulus alter EON, qui ſit ad priorem ACE, ut eſt AC ad OB, & ex puncto O velut centro deſcribatur arcus EN, qui ſecet rectam ON in puncto N. Unde etiam Epicyclois interna non ſemper erit ex numero curvarum mechanicarum, ſed tunc tantum, quum ratio, quæ eſt inter radios AC, OB nullis numeris poteſt deſignari. Interim circa figuram alterius hujus epicycloidis nequaquam diſtinguendi ſunt tres illi caſus, quos ad determinandam figuram epicycloidis externæ ſuperiùs diſtinximus. Nam, quum hæc alia epicyclois oriatur ex revolutione circuli intra circulum, profectò radius circuli mobilis minor ſemper eſſe debet radio circuli immobilis.

Id potiùs circa hanc alteram epicycloidem obſervandū hìc venit, quod ſi diameter

circuli mobilis adæquet radium circuli immobilis, epicyclois ipſa evadat linea recta per centrum immobilis circuli tranſiens, & axi ſuo perpendiculariter inſiſtens. Nam, quum ad inveniendum unumquodque epicycloidis punctum N fieri debeat ad centrum O angulus EON, qui ſit ad angulum OCE conſtitutum ad centrum C, ut eſt radius OC ad radium OB; proculdubiò ſemper ac OC ſemiſſis erit ipſius OB, erit etiam angulus EON ſemiſſis anguli OCE: & propterea punctum N locabitur in rectâ OD; quandoquidem angulus EOD, velut æqualis angulo EBO, ſemiſſis eſt anguli OCE. Fig.82.

Sed, ut alias utriuſque epicycloidis proprietates proſequamur, conſideremus adhuc ſemicirculum AEB ad talem poſitionem perventum eſſe, ut contingat in F circumferentiam circuli immobilis, punctumque deſcribens A incidat ſuper puncto N. Et quoniam portio indefinitè parva epicycloidis, quæ puncto N adjacet, conſiderari poteſt deſcripta à rectâ FN, revolutâ circa punctum F tamquam centrum, erit ipſa recta FN radius, aut etiam portio radii circuli, oſculantis epicycloidem in puncto N: proindeque, quia radius cujuſque circuli ſuam circumferentiam ad rectos angulos ſecabit, ſecabit eadem FN epicycloidem ND ad rectos angulos in puncto N. Unde

facili-

facili negotio ducemus rectam lineam, quæ epicycloidem in dato puncto N perpendiculariter secet: nimirum si descripto ex puncto O tamquam centro arcu EN, constituatur angulus FON æqualis angulo BOE, aut etiam si inter epicycloidem, & basim aptemus rectam FN æqualem chordæ correspondenti BE. Ex quo etiam nullo negotio ducetur recta linea, quæ epicycloidem contingat in N: nimirum si fiat angulus ONR æqualis angulo OEA.

Fig. 88. 89. Quod attinet ad rectificationem utriusque epicycloidis, determinabimus eam, inveniendo rationem, quam habet unaquæque portio AN ad correspondentem portionem A*n* cycloidis vulgaris, descriptæ per revolutionem ejusdem semicirculi AEB super recta B*d*. Quem in finem hoc theorema demonstrandum nobis proponimus, quod quælibet portio epicycloidis AN sit ad cycloidis correspondentem portionem A*n*, ut est OC ad OB. Id autem ostendemus hac ratione. Constituatur angulus NRT æqualis angulo *nrs*, ipsique RT perpendicularis demittatur NT: quibus peractis orietur triangulum RNT simile triangulo *rns*, & simile etiam triangulo AEM; eritque adeò angulus TRN æqualis angulo BAE, sive EB*d*, & angulus TNR æqualis angulo AEM.

Hinc quia, propter tangentem epicycloidis

, angulus ONR æqualis eſt angulo OEA,
etiam angulus ONT æqualis angu-
)EM,& conſequẽter angulus TNS æqua-
angulo BOE. Sed, quum circulus ſuper
â NR deſcriptus tranſeat etiam per pun-
S, & T, angulus TNS æqualis eſt angu-
TRS,& anguli TNR,TSR vel ſunt æqua-
inter ſe,vel ſimul duos rectos adæquant.
tur erit quoq; angulus TRS æqualis an-
lo BOE, & angulus TSR æqualis angulo
O:propterea que, quum ſimilia ſint trian-
la SRT, BOE,erit ut TR ad RS,ita EO ad
. Jam verò, ut mox oſtendemus, RS eſt
PM, ſive *rs*, ut eſt OC ad OE.Quare erit
æquali perturbando, ut TR ad *rs*, ita
: ad OB; atque adeò quia TR eſt ad *rs*, ut
. ad *nr*, erit ex æquali, ut NR ad *nr*,
OC ad OB; & conſequenter, quum
ubique reperiatur, erit OC ad OB, ita
tio epicycloidis AN ad correſponden-
n cycloidis portionem A*n*, ſive etiam ad
plum chordæ AE.

Quod autem RS, ſive QH ſit ad PM, ſive
, ut eſt OC ad OE, oſtendemus in hunc
odum. Quoniam enim rectus eſt tam
gulus OEI, quam angulus CEQ, ad-
to vel dempto communi CEI, erit angu-
s OEC æqualis angulo QEI: proindeque,
ia angulus PQE æqualis eſt angulo BCE,
it ut ſinus anguli OEC ad ſinum anguli
BCE,

BCE, ita ſinus anguli QEI ad ſinum anguli PQE. Jam verò ſinus anguli OEC eſt ad ſinum anguli BCE, ſive OCE, ut eſt OC ad OE; & aſſumptâ EQ pro radio, ſive ſinu toto, ſinus anguli QEI, ſive QEH eſt ad ſinum anguli PQE, ut QH ad PM. Quare erit ex æquali ut QH, ſive RS ad PM, ita OC ad OE.

Quod attinet ad quadraturam ſpatii epicycloidalis, determinabimus quoque illam, inveniendo rationem, quam habet unumquodque ſpatium epicycloidale AEN ad correſpondens ſpatium cycloidale AE*n*. Quem in finem hoc aliud theorema demonſtrandum nobis proponimus: nimirum ſpatium epicycloidale AEN eſſe ad ſpatium cycloidale correſpondens AE*n*, ut eſt OC ad OB. Id autem oſtendemus in hunc modum: quoniam ſpatiolum epicycloidale EQRN non differt ſenſibiliter à rectangulo, quod fit ex EN in RS, itemque ſpatiolum cycloidale EQ*rn* ſenſibiliter non differt à rectangulo, quod fit ex E*n* in *rs*, ſive PM; ſpatiolum primum erit ad ſpatiolum ſecundum in ratione compoſitâ ex EN ad E*n*, & ex RS ad PM. Jam verò, propter cycloidis proprietatem, recta E*n* æqualis eſt arcui AE, & ob naturam epicycloidis arcus EN eſt ad arcum AE, ut eſt OE ad OB. Igitur, qnum ex mox oſtenſis RS ſit ad PM, ut eſt OC ad OE, idem

dem ſpatiolum epicycloidale EQRN erit ad ſpatiolum cycloidale correſpondens EQrn in ratione compoſitâ ex OC ad OE, & ex OE ad OB, atque adeò in ſimplici illâ ratione, quam habet OC ad OB. Unde, quum hæc ultima ratio ſit conſtans, eaque ubique reperiatur, ſpatium epicycloidale AEN erit ad correſpondens ſpatium cycloidale AEn ſimiliter, ut OC ad OB.

Hinc quoque, quum integrum ſpatium epicycloidale AEBD ſit ad integrum ſpatium cycloidale AEBd, ut eſt OC ad OB; erit in hac eâdem ratione idem ſpatium epicycloidale AEBD ad duplum ſemicirculi AEB. Unde jam, quia ſpatium epicycloidale AEBD eſt ad ſemicirculum AEB, ut eſt 2OC ad OB; erit quoque componendo, ut totum ſpatiũ epicycloidale ACBD ad ſemicirculum AEB, ita 2OC + OB ad OB. Quin etiam, quia deſcripto ex puncto O velut cẽtro arcu AV, ſpatium interceptũ ABDV eſt ad ſectorem OBD, ut eſt quadruplum rectanguli ACO ad OB quadratum; & aliunde, propter arcus æquales BFD, AEB, ſector OBD eſt ad ſemicirculum AEB, ut eſt OB quadratum ad rectangulum CBO; erit ex æquali ordinando, ut ſpatium ABDV ad ſemicirculum AEB, ita quadruplum rectanguli ACO ad rectangulum CBO, ſive 4OC ad OB: proindeque, quia ordinando rurſus cum ſupe-

 riori

riori analogiâ ſpatium ABDV eſt ad totum ſpatium epicycloidale internum ACBD, ut eſt 4OC ad 2OC + OB; erit dividendo, ut ſpatium epicycloidale externum ADV ad ſpatium epicycloidale internum ACBD, ita 2OC — OB ad 2OC + OB, & conſequenter idem ſpatium epicycloidale externum ADV ad ſemicirculum AEB, erit, ut 2OC — OB ad ipſam OB.

Sed illud etiam à Geometris circa ſpatia epicycloidalia oſtenſum eſt: ſcilicet, quod ſi recta FN ſecet epicycloidem ad rectos angulos in puncto N, portio ſpatii epicycloidalis interni ABFN ſit ad portionem correſpondentem ſpatii circularis ABE, ut eſt 2OC + OB ad OB. Hoc autem facile demonſtrabimus, ſi conſideremus, eandem ſemper manere rationem inter ſpatia epicycloidalia ABFN, FDN, cujuſcumq; magnitudinis aſſumatur radius circuli immobilis OB. Hinc enim fiet, ut ſi radius iſte evadat infinitus, & conſequenter epicyclois AD abeat in cycloidem vulgarem A*d*, ratio ſpatiorum AB*fn*, *fdn* eadem maneat, ac prius; ſitque adeò ut ſpatium ABFN ad ſpatium FDN, ita ſpatium AB*fn* ad ſpatium *fdn*. Oſtenſũ eſt autẽ, ſpatium AB*fn* ad ſpatiũ *fdn* eandem habere rationem, quam ſpatium circulare ABE ad chordam BE terminatum ad reliquum ſegmentum BEB. Igitur erit ex æquali, ut ſpatium

tum circulare ABE ad segmentum reliquum BEB, ita spatium ABFN ad spatium ... ON, atque adeò componendo, & permutando erit, ut semicirculus ABE ad spatium ... tum ABD, hoc est, ut OB ad 2OC + OB, ita spatium circulare ABE ad chordam BE terminatum adspatium epicycloidale ABFN.

Ex quibus liquet, quadraturam spatiorum epicycloidalium ex circuli quadraturâ pendere, & nonnisi eâ præsuppositâ posse exhiberi. Sed nihilominus, perinde ac accidit in cycloide vulgari, dantur nonnulla spatia epicycloidalia, quæ quadrari possunt absque eo, quod ad circuli quadraturam recurrere sit opus. Nam primò si punctum M incidat super centro C, erit spatium epicycloidale AEN ad quadratum semidiametri AC, ut est OC ad OB. Nam in hoc casu correspondens spatium cycloidale AE*n* ostensum est æquale quadrato semidiametri AC. Est autem ex generali nostro theoremate, ut spatium AEN ad spatium AE*n*, ita OC ad OB. Et igitur erit quoque, ut spatium AEN ad quadratum semidiametri AC, ita OC ad OB.

Secundò, si idem punctum M taliter capiatur, ut erectâ perpendiculari ME, secante circuli circumferentiam in E, sit OE media proportionalis inter ipsas OA, OC, spatium epicycloidale ABEN erit ad trian-

gulum CBE, ut eſt 2OC ✝ OB ad OB. Oſtenſum eſt enim in hac ratione eſſe ſpatium epicycloidale ABFN ad correſpondens ſpatium circulare ABE. Atqui in caſu, de quo agimus, eandem quoque rationem habet ſpatium epicycloidale BENF rectis BE, FN terminatum ad ſectorem ACE. Itaque in eâdem etiam, dividendo, ratione erit reliquum ſpatium epicycloidale ABEN ad triangulum CBE.

Quod autem exiſtente OE mediâ proportionali inter OA, OC, ſpatium BENF ſit ad ſectorem ACE, ut eſt 2OC ✝ OB ad OB, oſtenditur ſic. Quoniam enim arcus AE æqualis eſt arcui BF, ſector ACE erit ad ſectorem BOF, ut eſt rectangulum CBO ad BO quadratum: proindeque, quia propter ſimilitudinem arcuum BF, EN, ſector BOF eſt ad ſpatium BENF, ut BO quadratum ad differentiam quadratorum OE, OB; erit ex æquali ordinando, ut ſector ACE ad ſpatium BENF, ita rectangulum CBO ad differentiam quadratorum OE, OB. Jam verò OE quadratum eſt æquale rectangulo AOC, & differentia inter rectangulum AOC, & OB quadratum eſt rectangulum aliud, quod fit ex BC in 2OC ✝ OB. Igitur erit ut rectangulum CBO ad rectangulum ex BC in 2OC ✝ OB, hoc eſt, ut OB ad 2OC ✝ OB, ita ſector ACE ad ſpatium BENF.

Sed

Sed notatu hìc dignum existimo, quod quemadmodum primum spatium epicycloidale, quod absolutè quadrabile demonstravimus, correspondet spatio cycloidali, cujus valorem independenter à quadraturâ circuli exhibuit Leibnitius; ita quoq; secundum spatium epicycloidale, quod etiam absolutè quadrabile ostensum fuit, correspondeat spatio cycloidali, cujus valorem independenter etiam à quadraturâ circuli detexit Hugenius. Quod facilè quidem suadetur, si quemadmodum clarè liquet, primum spatium epicycloidale abire in spatium cycloidale Leibnitianum, quum epicyclois in cycloidem vertitur; ita quoque ostendi possit, secundum spatium epicycloidale mutari in spatium cycloidale Hugenianum, quum epicyclois abit in cycloidem vulgarem. Id autem per proprietates infiniti facillimè præstabimus.

Nam, quum OE quadratũ sit æquale duobus quadratis OM, EM, erit etiam iisdem quadratis æquale rectangulum AOC. Sed quum centrum O abit in infinitum, quadratum EM est indefinitè parvum respectu alterius OM, & consequenter negligi potest. Igitur, quum epicyclois abit in cycloidem, erit rectangulum AOC æquale quadrato solius OM: proindeque erit, ut OC ad OM, ita OM ad OA. Jam verò dividendo habetur, ut

OC ad CM, ita OM ad MA. Igitur, quia lineæ OC, OM, utpote infinitæ, sunt æquales; erunt etiam æquales ipsæ CM, MA; atque adeò punctum M bisecabit radium CA, qui est casus ab Hugenio consideratus.

CAP. VI.

De motu pendulorum isochrono in quacumque gravitatis hypothesi.

VIdimus superiùs, quod ut pendula ad horologiorum usum aptari possint absque ullo sensibili errore, debeant eorum oscillationes, utcumque inæquales, esse isochronæ, hoc est eodem tempore fieri, ut scilicet ex numero oscillationum colligi possit tempus elapsum. Sed innuimus etiam, id nequaquam haberi posse, quum pendulorum oscillationes fiunt per arcus circulares. Nam etsi hujusmodi oscillationes, ubi exiguæ sunt, ad sensum sint etiam æquidiuturnæ; quia tamen non sunt omnimodè, ac geometricè tales, erit semper inter singulas oscillationes exiguum aliquod discrimen: unde demum necesse est, ut differentia satis magna oriatur.

Jam diximus quoque, Clarissimum Virum Christianum Hugenium primum omnium præmonstrasse, qua ratione fieri possit,

t, ut penduli oscillationes sint isochronæ, imirum si oscilletur pendulum in cyloyidis circumferentiâ; quum ab eodemıet fuerit ostensum, tempora descensus per rcus cycloidis, cujus vertex est punctum mum, inter se æqualia esse. Igitur ut prælarum hoc theorema ante omnia ostendanus, oportet recordemur nonnullarum propositionum, quas superiùs demonstratas exhibuimus.

Nempe primò, quod vis, qua grave acceleratur in descensu per aliquam curvam lineam, eadem sit planè, ac si per tangentem ejus curvæ, aut etiam per aliam rectam lineã tangenti parallelam descenderet: Secundò, quod vis, qua grave descendit per planum utcumque ad horizontem inclinatum, sit ad vim absolutam gravitatis, qua agente verticaliter descenderet, ut est altitudo plani ad ejusdem longitudinem. Et tertiò, quod si vires motrices sint in homologâ spatiorum describendorum ratione, spatia illa eodem tempore à corpore iis viribus agitato describantur.

His præmissis propositionibus, facili negotio ex ostensis cycloidis proprietatibus propositum theorema deducemus: nempe grave eodem tempore descendere ex puncto cycloidis N ad punctum infimum A, quo descendit ex quovis alio cycloidis puncto R FIG. 90

 ad

ad idem punctum infimum A. Nam ductis ordinatis MN, PR, junctisque chordis AE, AQ, quia chordis hisce ostensæ sunt parallelæ tangentes in punctis N, & R; erunt per propositionem primam vires, quibus grave acceleratur in punctis illis, eædem, ac si descenderet per chordas AE, AQ.

Jam verò per propositionem secundam vires, quibus grave acceleratur in descensu per chordas AE, AQ, sunt ad vim gravitatis absolutam, ut sunt rectæ AM, AP ad ipsas AE, AQ, sive etiam, propter circuli naturam, ut sunt chordæ AE, AQ ad eandem diametrum AB. Et igitur erit ex æquali, ut vis, qua grave acceleratur in puncto N, ad vim, qua idem grave acceleratur in puncto R, ita chorda AE ad chordam AQ: proindeque, quia spatia iis viribus describenda AN, AR ostensa sunt dupla chordarum AE, AQ; erunt eædem vires acceleratrices in punctis N, & R, ut ipsa spatia describenda AN, AR; & consequenter per propositionem tertiam æqualia erunt tempora descensus per arcus cycloidis AN, AR.

Hanc cycloidis proprietatem, ut dictum est, detexit primus omnium Clarissimus Geometra Christianus Hugenius in suo Opere nunquam satis laudando de Horologio Oscillatorio. Sed & tempus idem Auctor defini-

nivit, quo grave corpus unũquemq; cycloidis arcum uſque ad punctum infimum terminatum deſcriberet; oſtendendo nimirum, tempus deſcenſus per ſemicycloidem DNA, & conſequenter per quemlibet ejus arcum, eſſe ad tempus, quo idem grave deſcenderet per axem cycloidis AB, ut eſt circumferentia ſemicirculi genitoris AEB ad ipſum cycloidis axim AB.

Quod ut etiam hoc loco oſtendamus, recordemur priùs oportet trium aliarum propoſitionum, ſuperiùs quoque à nobis oſtenſarum, nempe primò, quod ſi vires, quibus grave corpus continuò acceleratur, proportionales ſint ſpatiis deſcribendis, tempus deſcenſus per aliquam longitudinem ſit ad ad tempus, quo eadem longitudo velocitate finali æquabiliter percurri poteſt, ut eſt quadrantis circumferentia ad radium. Secundò, quod velocitas, quam acquirit grave in deſcenſu per aliquam longitudinem nullis angulis interruptam, æqualis ſit ei, quæ acquiritur deſcendendo verticaliter ex eâdem altitudine. Et tertiò, quod ſi grave per longitudinem aliquam deſcendat, & æquali tempore velocitate ultimò acquiſitâ moveatur, duplum illius longitudinis percurrat.

His namque præmiſſis propoſitionibus, oſtendemus nullo negotio, quod tempus deſcen-

ſcenſus per ſemicycloidem DNA, aut etiam per quemlibet ejus arcum NA ſit ad tempus, quo idem grave deſcenderet per cycloidis axim AB, ut eſt circumferentia ſemicirculi genitoris AEB ad ipſum axim AB. Nam, quum vires, quibus grave acceleratur in deſcenſu per cycloidem, oſtenſæ ſint proportionales arcubus ad punctum infimum A terminatis; tempus deſcenſus per ſemicycloidem DNA, per propoſitionem primam, erit ad tempus, quo eadem longitudo percurri poteſt æquabiliter velocitate finali, ut eſt quadrantis circumferentia ad ſemidiametrum, ſive etiam ut eſt circumferentia ſemicirculi AEB ad axim AB.

Jam verò, per propoſitionem ſecundam, velocitas ultimò acquiſita in deſcenſu per ſemicycloidem DNA eſt æqualis velocitati, quæ ultimò acquiritur in deſcenſu per altitudinem AB, & ex ſuperiùs oſtenſis ſemicyclois DNA eſt æqualis duplo ſui axis AB. Igitur tempus deſcenſus per ſemicycloidem DNA eſt ad tempus, quo percurritur duplum axis AB velocitate ultimò acquiſitâ in deſcenſu per ipſum axim AB, ut eſt circumferentia ſemicirculi AEB ad eundem axim AB. Eſt autem per propoſitionem tertiam tempus, quo percurritur duplum axis AB velocitate ultimò acquiſitâ in deſcenſu per ipſum axim AB, æquale tempori deſcen-

ſus

ſus prædicti. Quare erit tempus deſcenſus per ſemycicloidem DNA ad tempus deſcenſus per cycloidis axim AB, ut eſt circumferentia ſemicirculi genitoris AEB ad ipſum cycloidis axim AB.

Exinde igitur, quod tempora deſcenſus per quoſvis arcus cycloidis uſque ad punctum infimum A terminatos ſint ſemper æqualia, ultrò liquet, quod ſi pendulum oſcilletur in perimetro totius cycloidis DAD, cujus vertex ſit ſemper punctum infimum A, illud ſive in magnos excurrat arcus, ſive etiam in minores, æqualibus ſemper temporibus ſingulas ſuas oſcillationes perficiat. Unde jam, quia ut horologia oſcillatoria ſint omnibus ſuis numeris abſoluta, neceſſe eſt, ut ſingulæ oſcillationes ſint iſochronæ, hoc eſt æqualibus temporibus fiant; perſpicuum eſt, ejuſmodi horologiorũ perfectionem facili negotio obtineri, ſi pendulum ſuas oſcillationes in perimetro cycloidis abſolveret.

Modum autem, quo fiet, ut pendulum non modò in cycloide, ſed in quavis aliâ datâ curvâ lineâ oſcilletur, primus omnium demonſtravit idem Hugenius in laudato ſuo tractatu de Horologio Oſcillatorio: nimirum inveniendo curvam aliam, per cujus evolutionem propoſita deſcribatur, & deinde duas laminas in eandem curvaturam inflectendo.

Ita

Ita, si DAD sit curva proposita, & AH axis ejus, inventis duabus aliis curvis DH, per quarum evolutionem partes propositæ curvæ describantur, substituendæ sunt in locum earum curvarum duæ laminæ eodem planè modo incurvatæ. Nam hoc pacto si penduli filum suspendatur ex puncto H, in quo prædictæ duæ laminæ conveniunt, sitque ejus longitudo æqualis axi AH, & consequenter longitudini cujusque laminæ DH; quia pendulum oscillando circa punctum H efficit, ut filum ipsum parte sui superiore continuò applicetur ad laminam, versus quam peragitur motus, & circa eam ceù obstaculum flectatur, parteque reliquâ, cui lamina non dum subjicitur, in lineam rectam protendatur: fiet hinc, ut per continuam istam fili ad laminas illas applicationem impediatur motus penduli in circumferentiâ circuli, atque adeò absolvatur in perimetro propositæ curvæ DAD, cujus partium evolutas laminæ illæ repræsentant.

Quocirca, ut pendulum in datâ cycloide oscilletur, invenienda est curva linea, per cujus evolutionem cyclois ipsa describatur. Eam autem facile quidem determinabimus, si recordemur, puncta evolutæ inveniri, quærendo punctum concursus duarum linearum, quæ ad rectos angulos in duobus punctis indefinitè proximis secant curvam, cuju

cujus quæritur evoluta. Hinc enim fiet, ut si AND sit semycyclois descripta ex revolutione semicirculi AEB super rectâ positione datâ BD, & sumptis in ejus perimetro duobus punctis N, & R indefinitè proximis, ducantur ad puncta illa duæ perpendiculares FN, GR, quæ protractæ conveniant in puncto K; punctum istud K sit in quæsitâ semicycloidis evolutâ DH. Fig. 91.

Hoc autem punctum facile determinabimus, si ductis ordinatis MN, PR, junctisque chordis BE, BQ, consideremus, quod propter perpendiculares FN, GR parallelas chordis BE, BQ, angulus NKR æqualis sit angulo EBQ, & consequenter ipsum triangulum NKR æquiangulum triangulo EBX. Etenim, quum portio cycloidis NR ostensa sit dupla rectæ EX, quæ est differentia chordarum AE, AQ, erit quoque recta NK dupla chordæ correspondentis BE; & propterea invenietur punctum K, si statuatur NK dupla chordæ BE. Quumque eadem sit demonstratio de quovis alio puncto cycloidis, palam est unumquemque radium suæ evolutæ duplum esse chordæ correspondentis, atque adeò recta AH dupla quoque erit diametri AB.

Hinc facile erit, naturam ipsius evolutæ DKH speciatim definire. Etenim, si compleatur rectangulum DBHL, semicirculus

DIL

DIL, descriptus super rectâ DL tamquam diametro, æqualis erit semicirculo genitori AEB: proindeque, si ducatur chorda DI parallela radio evolutæ NK, quia ea est etiam parallela chordæ BE, erit angulus IDL æqualis angulo ABE, atque adeò æquales erunt inter se tam arcus IL, AE, quàm arcus DI, BE. Unde jam, quum æquales sint etiam chordæ DI, BE, & BE sit æqualis FN, sive FK; erit quoque DI ipsi FK æqualis, & consequenter æquales etiam rectæ DF, IK. Est autem, per naturam cycloïdis, DF æqualis arcui BE, sive DI. Igitur erit quoque recta IK æqualis arcui DI; & propterea evoluta cycloidis DKH erit cyclois altera priori æqualis, sed inverso modo posita, quemadmodum ipse Hugenius, & plerique alii multifariam demonstrarunt.

Quocirca in priori schemate, si laminæ
FIG. 90. DH repræsentet duas semicycloides inverso modo positas, ita nempe, ut vertices ipsarum sint puncta D, sintque axes earundem æquales dimidio longitudinis penduli AH; curva DAD, in cujus perimetro pendulum oscillabitur, fiet cyclois integra, ejusque axis erit similiter æqualis dimidio longitudinis penduli AH. Cæterùm laminas in cycloidis formam incurvare, facile quidem erit; quandoquidem, ut vidimus capite antecedenti, cyclois facili negotio tam motu con-

continuo, quàm in plano per puncta describi potest.

Quod de cycloide ostensum fuit ab Hugenio, demonstravit etiam Newtonus in Principiis Philosophiæ Mathematicis de epicycloide internâ: nempe, quod vertice deorsum spectante æqualia sint tempora descensus per quosvis ejus arcus ad verticem, sive punctum infimum terminatos; verùm in hypothesi, quod grave descendens viribus urgeatur, quæ undique tendentes ad centrum circuli immobilis, proportionales sint distantiis ab eodem centro. Quin etiam si fieri possit, ut vis gravitatis sursum tendat ad datum punctum eâdem lege, obtinebit idem in epicycloide externâ, quæ per circuli supra circulum revolutionem describitur.

Sit enim utriusque epicycloidis DNA vertex punctum infimum A, & per ejus perimetrum descendat grave aliquod viribus tendentibus ad centrum circuli immobilis O, & proportionalibus distantiis ab eodem centro. Ducatur ad punctum N, in quo corpus versari suppono, tangens TR, ad quam agantur perpendiculares FN, OT; jamque vis corporis descendentis ON, per notissimam virium resolutionem, resolvetur in duas alias vires, rectis OT, TN designatas. Et quoniam prior harum virium OT directè cor-

FIG. 92. 93.

corpus à centro O impellendo, nihil confert ad corporis descensum, omnisq; acceleratio profluit ex vi alterâ TN, quippe quæ urgendo corpus versus R, directè accelerat descensum ejus in curvâ; fiet hinc, ut acceleratio corporis huic vi acceleratrici proportionalis sit singulis momentis, ut longitudo TN.

Jam verò, junctâ rectâ OF, quæ secet tangentem TN in puncto R, habetur ut TN ad NR, ita OF ad FR. Igitur, quia propter æqualitatem, tam linearum FN, BE, quàm angulorum NFR, EBA, æquales sunt etiam tam lineæ FR, BA, quàm lineæ NR, AE; erit quoque ut TN ad AE, ita OF, sive OB ad BA; & consequenter quum hæc secunda ratio ubique sit constans, acceleratio corporis in loco N erit, ut chorda AE, sive etiam ut arcus epicycloidis AN, quippe qui ad chordam AE ex ostensis constantem quoque habet rationem. Unde, quum eadem sit demonstratio de quovis alio epicycloidis puncto; consequens est, ut accelerationes corporis in duobus quibusvis punctis epicycloidis sint, ut arcus describendi, & propterea per propositionem illam superiùs memoratam æqualibus temporibus per arcus illos grave corpus descendet.

Hinc, si vires acceleratrices penduli oscillantis per perimetrum epicycloidis DAD tendant ubique ad centrum circuli immobi-

bilis O, sintque etiam ubique proportionales distantiis ab eodem centro, æqualia erunt tempora, quibus oscillationes utcumque inæquales absolvuntur. Etenim, quum ascensus corporis de loco infimo A per eosdē arcus epicycloidales motu retrogredo fiat, aut etiam per alios æquales, in aliâ epicycloidis parte sumptos; retardabitur pendulum ascendendo in locis singulis à viribus iisdem, à quibus descendendo accelerabatur. Unde, quum æquales sint velocitates ascensuum, & descensuum per eosdem, aut æquales arcus factorum; fiet hinc, ut quemadmodum in descensu inæquales arcus æqualibus temporibus describuntur, ita quoque æqualia sint tempora, quibus arcus utcumque inæquales in ascensu percurruntur.

Oscillabitur autem pendulnm in epicycloide DAD, si filum suspendatur ex tali puncto H, ut rectæ OA, OB, OH sint continuè proportionales, & laminæ DH ita quidem inflectantur, ut repræsentent duas alias semiepicycloides ejusdem speciei cum illâ, in qua pendulum debet oscillari, ita ut in iis OH sit semidiameter circuli immobilis, & BH diameter circuli mobilis. Has etenim esse curvas, ex quarum evolutione propositæ epicycloidis partes, hinc inde ab axi existentes, describuntur, facilè demonstrabimus, si rursus recordemur, puncta evolutæ alicujus cur- FIG. 94. 95.

curvæ esse concursus duarum rectarum, quæ curvam ipsam in duobus punctis indefinitè proximis ad rectos angulos secant.

Sint enim FN, GR duæ rectæ lineæ, quæ occurrant epicycloidi AND in duobus punctis indefinitè proximis N, & R ad rectos angulos, eæque conveniant in ipsius evolutæ puncto aliquo K. Describantur ex puncto O, velut centro, arcus concentrici EN, QR, & jungantur chordæ AE, AQ, BE, BQ, quemadmodum etiam ex puncto K tamquam centro describatur arcus indefinitè parvus FS. Et quoniam per genesim epicycloidis arcus AQ, AE æquales sunt arcubus BG, BF; erit quoque differentia illorum QE æqualis differentiæ istorum FG. Pariterque, quia perpendiculares FN, GR sunt æquales chordis BE, BQ; erit etiam differentia illarum GS æqualis differentiæ istarum QX.

Hinc, quum triangula rectangula FSG, QXE habeant duo latera FG, GS æqualia duobus lateribus QE, QX, habebunt etiam tertium latus FS æquale tertio lateri EX; & proinde, quum propter similitudinem sectorum KNR, KFS, KN sit ad KF, ut NR ad FS; erit quoque, ut KN ad KF, ita NR ad EX. Jam verò, quia portiones epicycloidis AN, AR sunt ad chordas AE, AQ, ut est 2OC ad OB, erit etiam in hac eâdem ratione

ne differentia illarum portionum NR ad differentiam chordarum EX. Igitur erit ex æquali, ut KN ad KF, ita 2OC ad OB: & proinde punctum evolutæ K invenietur, si fiat, ut OA ad OB, ita FN ad FK. Quumque eadem sit demonstratio de quovis alio puncto evolutæ, invenietur similiter punctum H, si fiat ut OA ad OB, ita AB ad BH, hoc est, si rectæ OA, OB, OH continuè proportionales capiantur.

Atque hinc facilè etiam ipsius evolutæ DKH natura determinabitur. Etenim, si centro O, intervallo OH describatur inter rectas OB, OD arcus HI, & super portione DI, tamquàm diametro, semicirculus constituatur DLI; invenietur, eam esse aliam epicycloidem, descriptam ex revolutione semicirculi DLI super concavitate, aut convexitate arcus IH. Nam ductâ ad punctum F rectâ OF, quæ tangenti TN occurrat in R, quia NF est ad FK, ut AB ad BH, sive etiam ut RF ad FG; erit triangulum NFR simile triangulo KFG, & consequenter si in semicirculo DLI inscribatur recta DL æqualis ipsi FK, jungaturque IL, æqualia erunt, & similia, tam triangula DLI, FKG, quàm triangula IOL, GOK. Unde, quum æquales sint rectæ OL, OK; arcus, qui centro O, & intervallo OL describitur, transibit per punctum K. Quumque æquales sint FIG. 92. 93.

etiam anguli IOL, GOK; erunt similes sectores IOG, LOK; & propterea erit, ut OI ad OL, ita arcus IG ad arcum LK.

Jam verò, propter similitudinem sectorum DOF, IOG, arcus DF est ad arcum IG, ut OB ad OH; itemque propter æqualitatem angulorum DIL, EAB, arcus BE est ad arcum DL, ut est AB ad BH, sive etiam, ut OB ad OH. Igitur erit ex æquali, ut arcus DF ad arcum IG, ita arcus BE ad arcum DL: ac proinde, quia, propter epicyclidem AND, arcus DF æqualis est arcui BE, erit etiam arcus IG æqualis arcui DL. Quare, quum ostensum sit, OI esse ad OL, ut est arcus IG ad arcum LK; erit quoque, ut OI ad OL, ita arcus DL ad arcum LK; & propterea punctum K erit ex superiùs ostensis in aliâ epicycloide descriptâ ex revolutione semicirculi DLI super arcu IH, quæ proinde similis erit priori AND; quandoquidem diametri circulorum mobilium AB, BH eandem inter se habent rationem, ac radii circulorum immobilium OB, OH.

Itaque, ut pendulũ in internâ epicycloide subinde possit oscillari, ut oscillationes omnes, utcumque inæqales, sint isochronæ, necesse est, ut viribus urgeatur, tendentibus ad centrum circuli immobilis, quod infra epicyloidem existit, & præterea proportionalibus distantiis ab eodem centro. Unde,

de, si talis sit terræ constitutio, qualis demonstratur à Newtono in libro tertio admirandi sui operis, quod Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica inscripsit: nimirum, ut vis gravitatis tendat ad centrum terræ, & in progressu ab ejus superficie sursum quidem decrescat in ratione duplicatâ distantiarum à centro, deorsum verò in ratione simplici; liquet, pendula in fodinis, & terræ cavernis inferiùs suspensa in internâ quidem epicycloide oscillari debere, ut non modò oscillationes omnes evadant isochronæ, verùm etiam, ut per ipsam vim gravitatis oscillationes obsolvantur.

Cæterùm, si in pendulorum oscillationibus sola temporum æqualitas desideretur, & parum referat, num vires pendulorum oscillantium dependeant à gravitate, aut ab aliâ quavis causâ; poterunt oscillationes illæ in qualibet aliâ curvâ lineâ peragi: enim verò semper inveniri poterunt vires, quibus pendula in datis curvis oscillari debeant, ut oscillationes utcumque inæquales æqualibus temporibus absolvant. Oscilletur namque pendulum HA in quavis datâ curvâ DAD ope laminarum DH, quæ repræsentent curvas, ex quarum evolutione partes propositæ curvæ describuntur, & quæratur vis, qua pendulum in hac curvâ oscillari debeat, ut oscillationes omnes FIG.96.

nes evadant isochronæ.

Sint AK curvæ lineæ, quæ ex evolutione partium propositæ curvæ describuntur, sitque NT radius evolutæ, correspondens puncto N, in quo pendulum versari suppono. Et siquidem vires omnes penduli oscillantis convergant ad centrum O, per quod transit axis datæ curvæ AH, erectâ ex puncto T perpendiculari TR, quæ occurrat rectæ NO in puncto R, designabit portio NR vim penduli oscillantis in loco N, ad hoc ut oscillationes omnes, utcumque inæquales, evadant isochronæ.

Nam hæc vis resolvitur in duas alias vires, per rectas TN, TR designatas. Atqui harum posterior TR, utpote perpendicularis radio evolutæ TN, nihil confert ad penduli descensum, quum trahat illud secundùm longitudinem sui fili, nec proinde mutationem aliquam in ejus motum inducat; omnisque acceleratio profluit ex vi alterâ TN, quippe quæ urgendo pendulum secundùm suam directionem, directè accelerat descensum ejus in curvâ. Itaque acceleratio penduli, huic vi acceleratrici proportionalis, erit singulis momentis, ut radius evolutæ TN.

Est autem ob naturam evolutarũ radius TN æqualis arcui describendo AN. Quare eadem acceleratio penduli in loco N erit, ut ar-

arcus describendus AN. Quumque eadem sit demonstratio in quocumque alio loco pendulum reperiatur; consequens est, ut accelerationes penduli in duobus quibusvis curvæ arcubus sint, ut ipsi arcus describendi; proptereaq; per superiùs memoratam propositionem arcus illos æqualibus temporibus pendulum describet.

Jam verò, ut eximii hujus problematis exemplum aliquod proferamus, quod in horologiis oscillatoriis usui nobis esse possit; supponamus curvam DAD esse portionem circuli circumferentiæ, cujus centrum sit ipsum punctum suspensionis H, ita ut duæ laminæ DH sint totidem plana rectilinea; centrumque virium O esse ipsum telluris centrum, ad quod dirigitur vis gravitatis, decrescens in progeressu à superficie telluris deorsum in ratione simplici distantiarum à centro ejus, prout demonstravit Newtonus.

Et quoniam recta ON exponit vim penduli, quam habet ex gravitate, & recta NR designat vim ejusdem penduli, quam habere debet, ut oscillationes omnes evadant isochronæ; vis gravitatis penduli erit ad vim ejusdem penduli pro isochronismo requisitam, ut est ON ad NR: proindeque, quia productâ TR usque ad S, ON est ad NR, ut OH ad HS; erunt eædem vires pen-

duli ipsis OH, HS respectivè proportionales.

Et quoniam radius evolutæ TN contingit circuli circumferentiam in puncto N, HS est ad TN, sive AN, ut semidiameter circuli HN, sive AH ad perpendiculum MN. Igitur, quia recta HS est æqualis rectangulo HAN ad perpendiculum MN aplicato, erit quoque, ut vis gravitatis penduli ad vim ejusdem penduli pro isochronismo requisitam, ita OH ad lineam, quæ oritur, applicando rectangulum HAN ad peprendiculum MN.

Hinc si vis gravitatis constans, & uniformis ponatur, quia constantis est etiam, & determinatæ longitudinis recta OH; erit vis penduli pro isochronismo requisita, ut linea, quæ oritur applicando rectangulum HAN ad perpendiculum MN, hoc est, ut arcus AN directè, & sinus ejus MN inversè. Quocirca in horologiis oscillatoriis si vires, à machinâ impressæ in pendulum ad motum conservandum, ita cum uniformi vi gravitatis componi possint, ut vis tota deorsum sit continuò, ut arcus describendus directè, & sinus ejus inversè, oscillationes omnes, utcumque inæquales, erunt isochronæ.

Sed quemadmodum datâ curvâ, in qua pendulum debet oscillari, semper invenire licet vim, quæ requiritur ad hoc, ut oscillationes omnes sint isochronæ; ita vicissim da-

tâ

tâ lege virium, inveniri semper poterit curva talis, ut in eâ pendulum oscillando æqualibus temporibus inæquales arcus describat.

Sit itaque O punctum, ad quod vires diriguntur, & circa axim AO describatur scala virium ABCO, hoc est figura talis, quæ ordinatis suis PM, QN designet vires, quibus grave corpus urgetur in distantiis OP, OQ; & invenienda sit curva isochrona, hoc est illa, in qua pendulum iis viribus agitatum oscillationes inæquales æqualibus temporibus perficiat. FIG. 97.

Terminetur pendulum ad punctum Q, & circa eundem axim AO describatur primò curva QHI talis naturæ, ut ordinatæ ejus AI, PH sint in subduplicatâ ratione arearum AQNB, PQNM; tum curva altera QRS, cujus ea sit natura, ut portiones QR, QS abscissæ per arcus concentricos PR, AS, ex puncto O tamquam centro descriptos, datam servent rationem cum ordinatis correspondentibus curvæ prioris PH, AI. Dico secundam hanc curvam eam esse, quam quærimus.

Capiatur enim in axi AO portio Pp indefinitè parva, & ex eodem pũcto O velut centro describatur arcus alter pr. Itaque, quia à centro virium O tantundem distant puncta S, & R, quantum puncta A, & P; acqui-

quiret grave corpus in descensu per arcum SR tantam velocitatem, quantam sibi comparasset, si utique descendisset per AP; & propterea quadratum ejus velocitatis erit, ut area correspondens APMB.

Describatur porrò centro A, intervalloque AI quadrans circuli IKF, & ex punctis H, & *h* agantur rectæ HK, *hk* axi AO parallelæ, quæ conveniant cum descripti quadrantis circumferentiâ in punctis K, & *k*. Itaque, quia area AQNB est, ut AI, sive AK quadratum, & area PQNM est, ut PH, sive AL quadratum; erit dividendo area APMB, ut KL quadratum: proindeque velocitas acquisita in descensu per arcum SR proportionalis erit rectæ KL.

Præterea, quia arcus QR datam servat rationem cum PH, servabit R*r* eandem datam rationem cum EH, sive GK: & propterea, quia tempus per R*r* est, ut R*r* directè, & velocitas, qua describitur, inversè; erit idem tempus per R*r*, ut GK directè, & KL inversè; adeòque erit, ut exponens rationis quam habet GK ad KL. Sed GK est ad KL, ut K*k* ad AK. Quare idem tempus per R*r* erit, ut exponens rationis, quam habet K*k* ad AK; atque adeò, quum eadem sit demonstratio in singulis curvæ punctis, fiet tempus per totam curvæ longitudinem SRQ, ut exponens rationis, quam habet quadrans

IKF

IKF ad radium AK, sive AI.

Descendat jam grave pendulum non quidem ex puncto S, sed ex alio quovis puncto R; et pari ratiocinio ostendetur, tempus per arcum RQ proportionale esse exponenti rationis, quam habet circumferentia quadrantis descripti radio PH, sive AL ad ipsum radium AL. Unde, quia ratio ista æqualis est rationi, quam habet quadrans IKF ad radium AI; erit tempus per totam curvæ longitudinem SRQ æquale tempori per arcum RQ; & propterea ipsa curva SRQ erit isochrona.

Quæ autem debeat esse data illa ratio, quam portiones inventæ curvæ isochronæ QR, QS servare debeant cum ordinatis correspondentibus PH, AI alterius curvæ, haud difficile erit definire. Sit enim DQ longitudo penduli oscillantis, atque adeò radius circuli, osculantis isochronam in puncto infimo Q, sintque quadrata ordinatarum PH, AI dupla arearum correspondentium PQNM, AQNB. Dico rationem illam subduplicatam esse ejus, quam habet rectangulum DQO ad rectangulum ex DO in QN.

Capiatur enim prope punctum Q portio indefinitè parva QX, & ex puncto O tamquam centro descripto arculo XY, agatur per punctum Y ordinata YZW. Ostendendum est igitur QX quadratum esse ad YZ qua-

quadratum, five etiam ad duplum areæ NQYW, quæ ſenſibiliter non differt à rectangulo NQY, ut eſt rectangulum DQO ad rectangulum ex DO in QN.

Eſt enim QY ſumma ex ſinubus verſis arcuum QX, XY, qui tamquam æquales conſiderari poſſunt. Quare erit QY æqualis duabus lineis, quarum altera oritur, applicando QX quadratum ad duplum ipſius DQ, altera applicando idem QX quadratum ad duplum ipſius QO. Unde, quum fiat ſolidum ex QX quadrato in DO æquale duplo ejus, quod ſub tribus DQ, QO, QY continetur, erit ut QX quadratum ad 2QY, ita rectangulum DQO ad DO; atque adeò ut QX quadratum ad duplum rectanguli NQY, ita rectangulum DQO ad rectangulum ex DO in QN.

CAP. VII.

De motu pendulorum compoſitorum, ſive de centro oſcillationis.

EGimus huc uſque de motu pendulorum ſimplicium, quæ ſui extremitate unicum pondus gerunt; agendum eſt modò de motu pendulorum compoſitorum, quæ pluribus ponderibus, immutabiles diſtantias ſervantibus, inſtructa ſunt: qua in re explican-

candæ ſunt priùs nonnullæ voces, quibus in poſterum utemur, ad imitationem aliorum, qui hanc materiam expendentes illiuſmodi voces uſurparunt.

Et primò quidem, quemadmodum in pendulo tum ſimplici, cum compoſito, vocatur punctum ſuſpēſionis illud, circa quod totum pendulum reciproco motu eundo, & redeundo oſcillatur; ita vocatur axis penduli compoſiti recta illa linea, quæ ex puncto ſuſpenſionis tranſit per commune centrum gravitatis ponderum omnium, quibus compoſitum pendulum inſtruitur; & axis oſcillationis linea illa, quæ tranſiens per punctum ſuſpenſionis, perpendicularis eſt ad ipſum penduli axem.

Præterea pendulum ſimplex dicitur iſochronum alteri pendulo compoſito, quum æqualibus temporibus oſcillationes per arcus ſimiles peragunt; ſive etiam, quum demiſſa ex ſitu horizontali, vel quolibet alio ſimiliter ad horizontem inclinato æquales conſtanter angulos ſimul oſcillando conficiunt. Et denique in pendulo compoſito vocatur centrum oſcillationis, punctum in axe penduli, cujus diſtantia ab axe oſcillationis æquatur longitudini penduli ſimplicis, compoſito iſochroni.

Hac ratione, ſi ABC ſit pendulum compoſitum, ita ut conſideratis lineis AB, BC, CA Fig. 98.

CA velut gravitatis expertibus, gerat in punctis B, & C duo quævis pondera, dum convertitur circa punctum suspensionis A; dicetur axis penduli recta AD, quæ ex puncto suspensionis A ducitur ad punctum D, commune centrum gravitatis ponderum B, & C; itemque dicetur axis oscillationis recta EE, quæ per punctum A ipsi AD perpendiculariter ducitur.

Porrò si fuerit AF pendulum aliud simplex, quod demissum ex situ horizontali deventum sit ad situm, in quo reperitur eodem omnino tempore, quo axis penduli compositi ex eodem situ horizontali pervenit ad eundem, quem cum pendulo simplici retinet situm; dicetur simplex hoc pendulum isochronum pendulo composito. Et siquidem longitudo hujusmodi penduli simplicis transferatur super axe penduli compositi AD ex A in F; dicetur punctum F centrum oscillationis. Nec sanè alio redit universa, quam ostendendam aggredimur, de motu pendulorum compositorum doctrina, quàm ut determinetur in pendulis compositis centrum istud oscillationis.

Hujusmodi problema de inveniendo centro oscillationis celebre fuit inter Geometras usque ab ætate Cartesii, illudque Christiano Hugenio, ferè adhuc puero, aliisque multis proposuit doctissimus Mersennus.

Sed

Sed à nemine id, quod desiderabat, tunc obtinuit. Non enim ab Hugenio, quippe qui, ut ipsemet fatetur parte quartâ sui horologii oscillatorii, quum nihil repererit, quo vel primus aditus ad contemplationem eam patesceret, velut à limine repulsus, à longiori investigatione tunc se abstinuit. Neque etiam ab aliis; nam etsi Viri insignes Cartesius, Honoratus Fabrus, aliique rem se confecisse crediderint, scopum tamen nequaquam attigerunt, nisi in paucis quibusdam facilioribus, quorum neque etiam demonstrationem ullam idoneam attulerunt.

Quum Clarissimo Viro Christiano Hugenio ex pendulorum horologii sui temperandorum ratione ad idem problema denuò tentandum occasio oblata fuerit, melioribus auspiciis, atque à primâ origine rem exorsus, tandem difficultates omnes superavit. Postulavit autem, ut sibi hoc principium concederetur: commune centrum gravitatis quotcumque ponderum, quæ vi gravitatis suæ junctim moventur, non posse altiùs ascendere, quàm ubi incipiente motu reperiebatur; idque tam si pondera illa junctim etiam ascendant, quàm si diffracto vinculo sursum velocitatem acquisitam unumquodque convertat.

Hoc principium, quominus scrupulum mo-

moveret, nihil aliud sibi velle notavit, quàm quod nemo unquam vocavit in dubium, gravia nempe sursum non ferri. Nam primò si unum tantùm sit corpus grave, illud vi gravitatis suæ altiùs ascendere non posse extra dubium est; ascendere autem tunc intelligitur, quum ejus centrum gravitatis ascendit. Sed & idem de quotlibet ponderibus, inter se per lineas inflexiles conjunctis concedi necesse est; quoniam nihil vetat ipsa tamquam unum aliquod considerari. Idemque verum etiam esse debet, si plura illa pondera non junctim ascendant, sed diffracto vinculo unumquodque sursum convertat motum suum; quandoquidem nulla videtur esse ratio, quæ possit contrarium efficere.

Ex hoc porrò principio sequentem elicit propositionom, quod si pendulum è pluribus ponderibus compositum, atque è quiete dimissum partem quamcumque oscillationis integræ confecerit, atque inde porrò intelligantur pondera ejus singula, relicto communi vinculo, velocitates acquisitas sursum convertere, ac quousque possunt ascendere; quod inquam commune centrum gravitatis eorum ponderum ad eandem præcisè altitudinem revertatur, quam ante inceptam oscillationem obtinebat.

Non enim altiùs ascendere potest ob princi-

cipium, quod sibi concedi postulavit; sed neque etiam humiliùs. Nam, si pondera illa intelligantur ex iisdem, ad quas ascenderunt, altitudinibus recidere; eædem velocitates ipsis acquirentur, quas habebant ante ascensum, & acquisierant motu penduli; adeòque, si rursus simul connectantur, & motum continuent, absolvet hoc modo restitutum pendulum oscillationis partem reliquam æquè ac, si absque ullâ interruptione motum continuasset.

Jam verò commune centrum gravitatis eorum ponderum in integrâ penduli oscillatione descendendo, & ascendendo æquales arcus describere debet. Itaque, completa oscillatione reperietur centrum illud in eâdem altitudine, in qua reperiebatur, priusquam pendulum dimitteretur; atque adeò paulò altiùs, quàm ubi ascenderat, quum sursum pondera diffracto vinculo velocitates acquisitas converterunt, & ex quo delapsa easdem velocitates sibi compararunt: quod equidem assumpto principio rursus refragatur.

Propositionem istam ex posito illo principio sic solidè deductam falsam esse putavit Dominus Abbas Catelanus, & consequenter corruere totum oscillationis systema Hugenianum, quod ut mox patebit huic innititur propositioni. Arbitratus est autem, fal-

ſitatem ejus oſtendi poſſe, hac unicâ obſervatione, quod vis, quam vocamus gravitatẽ, longè aliter agat in pondera inter ſe juncta, quàm in põdera à ſe invicem ſeparata. Nam
Fig.99. inquit, ſi pondera duo æqualia B, & A deſcendant ſeparatim per arcus BG, AF, acquirent velocitates tales, ut harum quadrata ſint, ut altitudines BI, AH, ſive etiam ut diſtantiæ BD, AD. Sed, ſi eadem pondera virgâ inflexili conjungatur, & pendulum compoſitum conſtituant; acquiretur quidem pendulo compoſito tantum velocitatis, quantum ſibi comparabant pendula duo ſimplicia, ſed velocitas diſtribuetur ponderibus B, & A pro ratione arcuum BG, AF, atque adeò pro ratione ſimplici diſtantiarum BD, AD, & non jam pro ratione ſubduplicatâ.

Ex quo patet, falſitatem propoſitionis Hugenianæ exinde collegiſſe Dominum Abbatem Catelanum, quia non perinde diſtribuitur ponderibus velocitas tota, quum moventur inter ſe juncta, quàm quum moventur à ſe mutuò ſeparata. Priori etenim caſu diſtribuitur pro ratione duarum magnitudinum ſimplici; in ſecundo verò caſu pro ratione earundem magnitudinum ſubduplicatâ. Unde, ſi pendulum compoſitum ex ponderibus B, & A peragat partem oſcillationis, exempli gratiâ, uſque ad DFG,

& oc-

& occurrat plano, ad quod frangatur, ut pondera à lineâ inflexili separentur, & tendat sursum eorum unumquodque cum velocitate acquisitâ ad maximam, quam potest, altitudinem, velut ad M, & L super planis inclinatis, si velimus, GM, FL, quæ tangant arcus BG, AF; altitudines MO, LN, ad quas duo pondera soluta ascendunt, diversæ erunt ab iis, unde descenderunt, BI, AH.

Et ut clariùs objectionis momentum intelligatur, pateatque qua ratione diffracto vinculo non possit per ea, quæ dicta sunt, ponderum commune centrum gravitatis, ad eandem præcisè altitudinem reverti; recordemur oportet ejus, quod superiùs ostensum est: nimirum altitudinem perpendicularem ad horizontem, unde descendit, vel ad quam ascendit commune centrum gravitatis multorum ponderum æqualium, æqualem esse summæ altitudinum, quarum respectu pondera ascendunt, vel descendunt, divisæ per numerum eorundem. Hinc itaque fit, ut si capiamus dimidium linearum BI, AH, & dimidium linearum MO, LN; ab unâ parte habeatur altitudo, unde commune centrum gravitatis descendit, ab alterâ altitudo, ad quam idem centrum ascendit; atque adeò, semper ac lineæ MO, LN diversæ sunt à lineis BI, AH, numquam ab utrâque parte eadem oriri poterit altitudo.

Huic objectioni in hunc modum responsum primò fuit ab Hugenio, quod etsi altitudines MO, LN diversam habeant rationem inter se, quàm altitudines BI, AH; non hinc tamen colligi debeat, summas primarum, & secundarum differre à se mutuò. Neque enim semper verum est, quod datis duabus lineis, & præter has duabus aliis, quæ diversam, quam primæ, inter se rationem habeant, summæ primarum, & secundarum inter se sint inæquales. Concipe namque priores esse 5, & 10 pedum, & alteras pedum 3, & 12; jamque summa istarum, æquè ac illarum, erit pedum 15. Itaque tametsi lineæ MO, LN diversæ sint à lineis BI, AH, fieri tamen potest, ut summæ ex utrâque parte sint æquales; atque adeò, ut æquales sint etiam semisses summarum, quæ duas altitudines communis centri gravitatis ponderum æqualium A, & B nobis exhibent.

Verùm Dominus Abbas Catelanus neque etiam summas illarum linearum æquales esse posse demonstravit: eâ nempe ratione, quod velocitas totalis, quæ oritur, capiendo velocitates utriusque ponderis, est eadem, tam in pendulo composito, quàm in pendulis simplicibus; ea autem distribuatur ponderibus ipsis in ratione duarum magnitudinum simplici, quum simul

mul per pēdulum compositum descendunt, & in ratione earundem magnitudinum subduplicatâ, quum diffracto vinculo seorsim ascendunt; altitudines verò, per quas eadem pondera ascendunt, vel descendunt, sive conjunctim, sive divisim, sint semper ut quadrata velocitatum.

Etenim, si $a + b$ referat totalem illam velocitatem, eâque divisâ in duas partes a, & b, dividatur deinde in duas alias x, & y, quæ sint, ut quadrata ipsarum a, & b; designabunt x^2, y^2 altitudines, unde pondera B, & A pendulo alligata dimittuntur, & a^2, b^2 altitudines, ad quas eadem pondera redeunt, postquam percussione fuerint separata. Non esse autem $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, nisi in casu, quo a, & b sunt æquales, facilè quidem per calculum ostendi potest; quum x, & y prodeant duæ magnitudines: quæ habent communem denominatorem $a^2 + b^2$, numeratores verò diversos $a^3 + a^2b$, & $b^3 + ab^2$.

Hinc aliâ ratione objectionem Domini Abbatis Catelani excepit Hugenius, nimirum quod falso huic inniteretur principio: velocitatem totalem penduli compositi, quæ in singula pondera distribuitur proportionaliter ad arcus, quos ipsa describunt, æqualem esse summæ velocitatum, quas eadem pondera acquisivissent, si sejuncta sin-

gula ſeparatim ex iiſdem altitudinibus, & in eâdem diſtantiâ ab axe deſcendiſſent. Quod utique principium falſum eſſe demonſtravit deinceps Dominus Jacobus Bernoullius in litteris Lipſiam miſſis anno 1686, continentibus narrationem controverſiæ hujus inter Hugenium, & Abbatem Catelanum, afferendo cauſam phyſicam, omiſſam ab Hugenio, qua fit, ut penduli compoſiti velocitas perpetuò minor ſit velocitate partium ejus ſeparatarum.

Concepta eſt autem Domini Bernoullii demonſtratio in hunc, qui ſequitur, modum. Ponamus majoris evidentiæ ergo, pondera penduli A, & B in lineâ inflexili DB liberè hinc inde moveri poſſe, ſic ut linea hæc dum rotatur circa axem D, quàmvis ſecum rapiat pondera, non tamen impediat deſcenſum illorum in lineâ rectâ verſus terræ centrum. Quo poſito conſtat, utrumlibet pondus, ſigillatim dimiſſum, eâdem velocitate latum iri, qua ferretur abſque virgâ DB, utpote nec à virgâ, nec ab ejus axe ullo modo impeditum: proindeque ſi pondus A abſque virgâ certo tempore conficit ſpatium AH, & pondus B ſpatium æquale BN, utrumque etiam cum virgâ, ſed ſigillatim, dimiſſum eodem tempore idem ſpatium AH, vel BN conficiet.

Fig. 100.

Conſtat inſuper, quod ſi gravitas in utrum-

trumque pondus ageret viribus, quæ proportionatæ forent ipsorum respectivè ab axe distantiis, virga nullum adhuc ipsorum descensui afferret impedimentum, quandoquidem exacto certo tempore unum eorum reperiretur in H, & alterum in I, vel prius in L, posterius in N, sive absque virgâ, sive cum virgâ, sive sigillatim, sive conjunctim dimitterentur. Verumtamen, quia gravitas in utrumque pondus agit viribus æqualibus, sic ut pondera eodem tempore æqualia spatia AH, BN transfigere annitantur, & tamen dum pondus B jam est in N, alterũ A junctim dimissum, ob inflexilem virgam, nequit interea pertingere nisi ad L; hinc sequitur, gravitatis vim in pondere A non esse exhaustam, adeòque residuum harum virium ex unâ parte urgere debere corpus B, ex alterâ ipsum axem D, eundemque premendo, aliquam sui partem ibidem insumere, & deperdere; nam virgam in hoc casu instar vectis considerari posse extra dubium est. Non igitur vis gravitatis corporum A, & B agit tota in ipsa corpora, quum simul per inflexilem virgam dimittuntur, sed portio transfertur in axem D: unde consequens fit, velocitatem penduli compositi perpetuò minorem esse velocitate partium ejus separatarum.

Præterea contra Dominum Abbatem Catela-

telanum illud etiam objecit Hugenius, quod quum ex ejus principiis commune centrum gravitatis revertatur altiùs, quàm unde descenderat, jam hinc detectum haberetur perpetuum mobile, doctis Viris existimatum impossibile. Et quamquam Dominus Bernoullius in laudatis suis litteris advertat in favorem Domini Catelani, id nequaquam sequuturum; quoniam in istis abstrahi solet ab aeris resistentiâ, à diminutione velocitatis, quæ necessariò sequitur disruptionem vinculi, quo connectabantur partes penduli, aliorumque obstaculorum. Nihilominus, ut ipsemet Hugenius alibi deinde observavit, considerare debuisset Vir Clarissimus, quod quum altitudo illa major, quam acquirit centrum gravitatis, sit semper determinatæ quantitatis, & effectus obstaculorum non sit determinatus, imò minui magis, magisq; possit; facile construi queat machina ejuscemodi, in qua commodum ex elevatione centri gravitatis derivatum præponderaret impedimento obstaculorum, atque ita motum perpetuum efficeret.

Sed videamus modò, qua ratione Hugenius ex eo, quod commune centrum gravitatis ponderum, pendulum componentium, ad eandem præcisè altitudinem diffracto vinculo ascendere debeat, quam ante inceptam penduli oscillationem obtinebat, deter-

terminaverit in pendulo composito centrum oscillationis, hoc est longitudinem penduli simplicis, composito isochroni. Rem igitur exposuit hoc theoremate: nimirum, quod si singula pondera, pendulum componentia, ducantur in quadrata suarum distantiarum ab axe oscillationis, & summa productorum dividatur per id, quod fit, ducendo ponderum summam in distantiam communis centri gravitatis ab eodem axe oscillationis, oriatur longitudo penduli simplicis, composito isochroni, hoc est distantia inter axem, & centrum oscillationis ipsius penduli compositi.

Theorematis hujus demonstrationem negativam attulit Hugenius, sed nihil vetat, quominus eadem demonstratio positivè concipiatur. Itaque sint A, B, C pondera, pendulum componentia, quorum nec figura, nec magnitudo, sed gravitas tantùm consideretur; eaque suspendantur ab axe, qui transiens per punctum D, rectus sit ad planum, quod conspicitur. Sit etiam in hoc eodem plano ponderum commune centrum gravitatis E; ipsa namque pondera in diversis planis esse nihil refert. Tum in axe penduli DE referat punctum L centrum oscillationis, ita ut DL sit longitudo penduli simplicis, composito isochroni. Et designatis ipsis ponderibus litteris minusculis *a*, *b*, *c*, re- FIG. 101.

c, referant eorum ab axe distantias AD, BD, CD litteræ c, f, g; & præterea vocetur d recta DE, quæ est distantia communis centri gravitatis ab eodem axe, & x recta DL, quæ est longitudo penduli simplicis, composito isochroni.

Jam id, quod fit, ducendo singula pondera in quadrata suarum distantiarum, est $aee + bff + cgg$, & id, quod fit, ducendo summam ponderum in distantiam communis centri gravitatis est $ad + bd + cd$. Unde eò res redit, ut ostendamus quotientem, qui oritur, dividendo productum primum per secundum, æqualem esse incognitæ x, vel, quod idem est, subsistere æquationem istam $adx + bdx + cdx = aee + bff + cgg$. Id autem ostendemus in hunc modum.

Quoniam enim punctum L est centrum oscillationis, perficiet illud suam oscillationem eodem tempore cum puncto E, in quo collecta concipitur gravitas ponderum omnium: proindeque dum punctum L descripto arcu LP pervenit ad P, punctum alterũ E perveniet ad Q descripto arcu EQ, simili ipsi LP. Quocirca ductis à pũctis P, & Q perpendicularibus sursũ PS, QR, quæ occurrant subtensis arcuum integrorũ LN, EI in punctis S, & R, positâque PS = y; quia DL est ad DE, ut PS ad QR, invenietur altitudo, unde decidit commune centrum gravitatis,

QR

$QR = \frac{dy}{x}$.

Porrò, quia pondera A, B, C communi vinculo continentur, fiet hinc, ut dum L transit ad P, pondera ipsa percurrant arcus AT, BV, CX similes ipsi LP, eorumque velocitates in punctis T, V, X sint ad velocitatem, quam habet L in P, ut sunt distantiæ AD, BD, CD ad distantiam DL. Jam verò eædem velocitates sunt, ut radices altitudinum, quæ iis mediantibus percurri possunt. Igitur ex æquali altitudo, ad quam ascenditur velocitate puncti L, quum est in P, erit ad altitudines, ad quas ascenditur velocitatibus acquisitis à ponderibus A,B,C in punctis T,V, X, ut est quadratum distantiæ DL ad quadrata distantiarum AD, BD, CD.

Hinc, quia punctum L eam habet velocitatem in P, qua valet ad eandem, unde decidit, altitudinem ascendere, nempe per arcum PN, vel etiam per perpendicularem PS; proinde, inito calculo, erunt $\frac{eey}{xx}$, $\frac{ffy}{xx}$, $\frac{ggy}{xx}$ altitudines, ad quas ascenderent pondera A, B, C velocitatibus acquisitis in punctis T, V, X. Quocirca, si eædem altitudines multiplicentur per sua pondera, & summa-

pro

productorum dividatur per summam ponderum, designabit quotiens inde ortus $\frac{aeey + bffy + cggy}{axx + bxx + cxx}$ altitudinem, ad quam ascendit commune centrum gravitatis eorum ponderum.

Ostensum est autem, altitudinem istam æqualem esse altitudini, unde descenderat. Igitur, quia altitudo descensus est $\frac{dy}{x}$, erit $\frac{aeey + bffy + cggy}{axx + bxx + cxx} = \frac{dy}{x}$. Unde, divisis partibus æquationis hujus per y, iisdemque multiplicatis per $axx + bxx + cxx$, orietur loco ejus hæc altera æquatio $aee + bff + cgg = adx + bdx + cdx$, quæ est ipsissima illa, ad quam Hugenii theorema reduximus.

Quoniam autem hujusmodi demonstratio illi innititur fundamento, quod commune centrum gtavitatis ponderum, pendulum componentium, ad eandem præcisè altitudinem, diffracto vinculo, ascendere debeat, quam ante inceptam penduli oscillationem obtinebat; videamus num idem theorema possit absque illo principio aliter ostendi: quod equidem agentes, Hugenianam de centro oscillationis theoriam jam ab omni

omni ſcrupulo vindicabimus. Id præſtitit primus omnium Jacobus Bernoullius in ſuo Schediaſmate, inſerto Monumentis Regiæ Scientiarum Academiæ Pariſienſis anni 1703. Tum methodis non multum diverſis hoc idem perfecerunt Bernoullius frater in monumētis anni 1714, Hermannus in ſuâ Phoronomiâ, & Volphius in ſuâ Mechanicâ. Sed horum omnium demonſtrationes paulò perplexas, ac intricatas in hunc modum leniemus.

Sit pendulum ABC, compoſitum ex duobus ponderibus B,& C,quod moveatur circa axem EE rectum ad planum,quod conſpicitur, ita ut AB, AC ſint diſtantiæ ponderum ab axe oſcillationis, ſitque AD axis ejus, & F centrum oſcillationis. Dico pondera B, & C, multiplicata per quadrata ſuarum ab axe oſcillationis diſtantiarum AB, AC tantùm efficere, quantum ſumma eorundem pōderum multiplicata per rectangulū DAF. FIG. 98.

Ducatur per punctum A linea horizontalis AK, ad quam demittantur perpendicula BG, CH, DI, FK. Tum intelligatur pendulum percurrere angulum indefinitè parvum, ita ut pondera B, C, F deſcribant arcus BN, CN, FN ſimiles inter ſe, & proportionales diſtantiis AB, AC, AF. Itaque, niſi retinaculum obſtaret, vis gravitatis eodem modo ageret in pondera B, &

C,

C, ac in id, quod concipitur applicatum puncto F, sed propter obstaculum illud impulsus, quos pondera illa B, C, F excipiunt à gravitate, erunt inter se, ut arcus eodem tempore descripti BN, CN, FN.

Jam designatis per arcus istos BN, CN, FN inæqualibus impulsibus, quos pondera B, C, F simul per pendulum mota excipiunt à gravitate; designentur per exiguas rectas verticales, & æquales BM, CM, FM æquales impulsus, quos iisdem ponderibus imprimeret vis gravitatis, si seorsim absque ullo impedimento moverentur. Et quoniam pondera B, & C in revolvendis radiis AB, AC datum angulum continentibus tantundem possunt viribus BM, CM, ac si eos traherent viribus BN, CM; erit ob generale principium æquilibrii B.BM.AG†C.CM.AH = B.BN.AB†C.CN.AC. Atque ita quoque, quum pondus F perinde possit in revolvendo radio AF per vim FM, ac si eum traheret per vim alteram FN, erit F.FM.AK = F.FN.AF, hoc est FM.AK = FN.AF.

Atque hinc porrò erit, ut B.BM.AG †C.CM.AH ad FM.AK, sive etiam propter æquales BM, CM, FM, ut B.AG † C.AH ad AK, ita B. BN. AB † C. CN. AC ad FN. AF. Sunt autem arcus BN, CN, FN proportionales distantiis AB, AC, AF; itemque propter D, commune centrum gravitatis

pon-

ponderum B, & C, est B.AG + C.AH = B. AI + C.AI. Quare erit etiam, ut B. AI + C. AI ad AK, hoc est propter rectas AD, AF ipsis AI, AK proportionales, ut B.AD + C. AD ad AF, ita $B.AB^2 + C.AC^2$ ad BF^2. Unde eruitur $B.AB^2 + C.AC^2 = B.AD.AF + C.AD.AF$, hoc est summam productorum, quæ fiunt ex ponderibus B, & C in quadrata suarum distantiarum AB, AC, æqualem esse ei, quod fit multiplicando summam eorundem ponderum per rectangulum DAF.

Patet autem, eandem esse demonstrationem, si pondera pendulum componentia sint plura, quàm duo. Sed ex iisdem principiis facile quoque erit ostendere, commune centrum gravitatis ponderum, pendulum componentium, ad eandem præcisè altitudinem, diffracto vinculo ascendere debere, quam ante inceptam penduli oscillationem obtinebat. Ascendant enim pondera B, & C velocitatibus acquisitis in descensu, inchoato à rectâ horizontali AK, ad puncta *b*, & *c*, & eorum commune centrum gravitatis D ascendat in *d*.

Itaque, quia velocitates ponderum B, C, F proportionales sunt distantiis AB, AC, AF, & velocitas ponderis F tanta est, cum qua possit rursus ascendere per eandem altitudinem FK, unde descenderat; erunt altitudines B*b*, C*c*, FK, ut quadrata distantiarum AB,

AB, AC; AF. Erat autem ut B.AD+C.AD ad AF, ita B.AB^2 + C.AC^2 ad AF^2. Quare erit quoque ut B.AD + C.AD ad AF, ita B.B*b*+C.C*c* ad FK, atque adeò permutando B.AD+C.AD erit ad B.B*b*+C.C*c*, ut AF ad FK, five etiam, ut AD ad DI. Jam verò, propter D commune centrum gravitatis ponderum B, & C, est B.B*b* + C. C*c* = B.D*d* + C.D*d*. Itaque erit etiam, ut B.AD+C.AD ad B.D*d* + C.D*d*, hoc est, ut AD ad D*d*, ita AD ad DI. Est igitur D*d* æqualis DI, & propterea ascensus communis centri gravitatis æqualis erit descensui.

Sed nolim hìc silentio præterire id, quod idem Hugenius observavit, nimirum quod si pondera, pendulum componentia, æqualia fuerint, tunc faciliùs inveniatur centrum oscillationis, hoc est longitudo penduli simplicis, composito isochroni: scilicet, si summa quadratorum, factorum à distantiis, quibus unumquodque pondus abest ab axe oscillationis, applicetur ad distantiam communis centri gravitatis ab eodem suspensionis puncto, multiplicem secundùm ipsorum ponderum numerum. Quod equidem sufficerit adnotasse, quum nemo non sit, qui intellecto theoremate generali veritatem ejus non agnoscat.

CAP.

CAP. VIII.

De oscillatione planorum, & solidorum, ubi etiam de identitate centri oscillationis cum centro percussionis.

QUæ de motu pendulorum simplicium superiùs ostensa sunt, tunc tantùm in praxi vera reperiuntur, quum filum, ex quo pondus suspenditur, est valde tenue, ipsumque pondus est globus exiguus, ex materiâ perquàm gravi conflatus; quandoquidem in eorum demonstrationibus, & filum gravitatis expers, & totius ponderis gravitatem ad merum punctum redactam supposuimus. Hinc, siquidem filum sit alicujus sensibilis crassitiei, & pondus valde magnum; ostensæ illæ leges de motu pendulorum simplicium valde turbabuntur; quia hac ratione pendulum non amplius ut simplex, sed veluti compositum debet considerari.

Multò minus eædem illæ leges veræ comperientur, si ad oscillationes peragendas figura aliqua, sive plana, sive solida capiatur: Nam figura ista considerari debet velut pendulum ex infinitis ponduscuIis compositum; adeòque, ut legibus penduli simplicis subjici possit, determinari debet

in eâ centrum oſcillationis, hoc eſt longitudo penduli ſimplicis, quod illi ſit iſochronum. Jam autem, qua ratione in figuris tum planis, cùm ſolidis determinari poſſit centrum oſcillationis, colligitur ex theoremate generali, ſuperiori capite à nobis oſtenſo.

Nimirum demonſtravimus in capite antecedenti, diſtantiam centri oſcillationis ab axe prodire, ſi ſingula pondera, pendulum componentia, multiplicentur per quadrata ſuarum ab axe diſtantiarum, & ſumma productorum dividatur, per id, quod oritur, multiplicando eorundem ponderum ſummam per diſtantiam communis centri gravitatis ab eodem axe. Itaque, ſi duo tantùm B, & C, fuerint pondera pendulum componentia, quorum commune centrum
FIG. 98. gravitatis ſit D, invenietur in axe penduli AD centrum oſcillationis F, ſive diſtantia ejus ab axe AF, ſi multiplicatis ponderibus illis B, & C per quadrata ſuarum ab axe diſtantiarum AB, AC, dividatur ſumma productorum per id, quod gignitur, multiplicando utrumque pondus per AD: adeò, ut

$$\text{erit } AF = \frac{B.AB^2 + C.AC^2}{B.AD + C.AD}.$$

Quod ſi autem pondera B, & C fuerint indefinitè parva, & indefinita paria ex iis pendulum componant; tunc, ut fractio illa poſ-

possit nobis exhibere valorem ipsius AF, capiendum est integrale, tam numeratoris $B.AB^2 + C.AC^2$, quàm denominatoris B.AD + C.AD: adeò, ut valor ipsius AF erit integrale numeratoris applicatum ad integrale denominatoris. Et ratio est, quia in hoc casu numerator ejus fractionis est differentia quantitatis, quæ oritur, multiplicando pondera omnia, pendulum componentia, per quadrata suarum ab axe distantiarum; denominator verò est differentia ejus, quæ gignitur, multiplicando summam ponderum omnium per distantiam communis centri gravitatis ab eodem axe.

Ponamus jam pondușcula B, & C inter se æqualia esse, itemq; rectam BC perpendicularem esse super AD. Et quoniam in hoc casu distantia BC secatur bifariam in D; erit, cum DB æqualis DC, cùm AB æqualis AC. Unde si vocetur AD x, & DB, sive DG y; fiet tam AB quadratum, quàm AC quadratum $= xx + yy$: adeoque, si unumquodque ex ponduscula æqualibus B, & C dicatur dp; erit $B.AB^2 + C.AC^2 = 2xxdp + 2yydp$, & $B.AD + C.AD = 2xdp$: proindeque, capiendo integrale quantitatis $xxdp + yydp$, illudque dividendo per integrale alterius quantitatis $xxdp$, habebitur valor ipsius AF; eritque adeò $AF = \frac{S.\,xxdp + yydp}{S.\,xdp}$, desi-

 gnan-

gnando, ut vulgò fieri solet, litterâ S integrale quantitatis, cui ea præfigitur: quæ quidem est ipsissima formula, quam ex methodo suâ elicuit Jacobus Bernoullius in schediasmate, inserto Monumentis Regiæ Scientiarum Academiæ Parisiensis anni 1703.

Jam ope hujus formulæ facile erit, definire centrũ oscillationis in figuris, tum planis, cum solidis. Ut autem à planis ordiamur, in iis duplicem oscillationis motũ consideravit Hugenius; unum nempe circa axem in eodem cum figurâ plano jacentẽ, quem proinde vocavit agitationem in planum; alterum circa axem ad figuræ planum erectum, quem idcircò agitationem in latus appellavit. Sit itaque figura plana MON, quæ suspensa ex puncto A, existente in axe ejus OD sursum producto, agitetur primò in planum, ita ut suas peragat oscillationes circa axem EE, in eodem cum figurâ plano jacentem. Et oporteat figuræ hujus sic oscillantis oscillationis centrum definire.

Fig. 102.

Capiatur in axe figuræ propositæ OD punctum aliquod D, per quod agatur ordinata MN, bisecta propter axem in ipso puncto D. Et quoniam ordinata ista MN parallela est axi oscillationis EE, singula ejus puncta, dum figura oscillabitur, eâdem velocitate movebuntur: proindeque perinde erit, ac si totum pondus ejus, sive etiam exi-

exigui rectanguli ei adjacentis collectum sit, & coacervatum in puncto D. Unde, quum distantia ipsius ab axe oscillationis designetur per AD $= x$, habebitur in hoc casu $xxdp + yydp = xxdp$, quum ignotæ y nulla ratio sit habenda. Jam verò dp designat pondus exigui rectanguli DMmd, sive DNnd. Itaque, quia positâ DM, sive DN $= u$, fit $dp = udx$, erit $AF = \frac{S.\,uxxdx}{S.\,uxdx}$; adeòque, si in formulâ istâ speciali substituatur valor ipsius u, qui eruitur ex æquatione datæ figuræ, & quantitates differentiales debitâ ratione integrentur, habebitur pro datâ illâ figurâ valor ipsius AF.

Eadem figura plana MON; suspensa adhuc ex puncto A, agitetur secundò in latus, ita ut suas perficiat oscillationes circa axem EE, erectum ad planum figuræ. Et oporteat figuræ hujus in hunc alium modum oscillantis oscillationis centrum determinare. Quoniam in hoc casu ordinata MN non est parallela axi oscillationis EE, fit hinc, ut singula ejus puncta, sive elementa in oscillatione figuræ nequaquam eâdem velocitate moveantur. Unde procul est, ut supponi possit gravitatem totam ordinatæ MN, sive potius exigui rectanguli ei adjecentis collectam esse, & coacervatam in puncto D;

 sed

sed necesse est, ut singulas ejus particulas in propriis locis consideremus; ut earum ab axe oscillationis distantiæ habeantur.

Quocirca, ut in hoc casu habeatur valor quantitatis differentialis $xxdp + yydp$, multiplicare oportet, non quidem rectangulum DMmd, sive DNnd per quadratum, quod fit ex AD, hoc est udx per xx, ut in præcedenti casu factum est; sed singula elementa ejus rectanguli, habentia dx velut communem altitudinem, per quadrata suarum distantiarum à puncto A. Jam unumquodque elementum ejus rectanguli, habens dx pro suâ altitudine, est $dydx$, quum incognita y designet distantiam cujuslibet illorum à puncto D; & quadratum distantiæ cujusque eorundem elementorum à puncto A est summa quadratorum $xx + yy$, quorum alterum xx est constans, alterum yy variabile: ex quo patet, valorem quantitatis differentialis $xxdp + yydp$ in casu nostro haberi, si capiatur integrale alterius hujus quantitatis differentialis $xxdydx + yydydx$, in qua tantùm y, & dy sint variabiles.

Jam integrale alterius hujus quantitatis differentialis $xxdydx + yydydx$, non aliud variabile continentis, quàm y, & dy, est $yxxdx + \frac{1}{3}y^3dx$, quod fit $uxxdx + \frac{1}{3}u^3dx$, quū

quum in integratione omnia $dydx$ sunt cō-
prehendenda. Quare erit $uxxdx + \frac{1}{3}u^3dx = xxdp + yydp$; & propterea in casu, de quo agimus, erit AF æqualis integrali quantitatis $3uxxdx + u^3dx$ applicato ad integrale alterius hujus quantitatis $3uxdx$. Unde, si in duabus istis quantitatibus differentialibus substituatur loco u valor, qui eruitur ex æquatione datæ figuræ, & ipsæ quantitates debitâ ratione integrentur; dividendo integrale prioris per integrale alterius, habebitur valor ipsius AF pro datâ illâ figurâ.

Atque hæc pro inveniendo centro oscillationis in figuris planis, sive eæ agitentur in planum, sive etiam in latus. Videamus modo, qua ratione idem centrum oscillationis determinari possit in figuris solidis, in quibus duæ illæ species agitationum distingui nequaquam possunt. Hunc in finem præmittendum est prius hoc lemma, quod si fuerit circulus aliquis BCF, cujus centrum sit punctum D, diameter recta BC, omnia ejus elementa EFfe, multiplicata per quadrata suarum à centro distantiarum DE, tantundem simul efficiant, quantum efficit tota circuli area, multiplicata per quadratum, quod fit ex semisse radii BD. Fig. 103.

Ponatur enim $BD = 2a$, $DE = x$, & $EF = y$. Erit igitur $Ee = dx$, areola $EFfe = ydx$, & id, quod gignitur, multiplicando areolam $EFfe$ per DE quadratum, $= yxxdx$. Unde eò res redit, ut differentialis hujus quantitatis debitum integrale inveniamus. Ad hoc autem inveniendum, considerare prius oportet, quod, quum propter circulum sit $4aa - xx = yy$, erit $a^2 = \frac{1}{4}yy + \frac{1}{4}xx$. Adeòque, quia $yxxdx$ idem est, ac $a^2ydx - a^2ydx + yxxdx$; posito in termino $-a^2ydx$ loco a^2 valore ejus, fiet $yxxdx = a^2ydx - \frac{1}{4}y^3dx - \frac{1}{4}yxxdx + yxxdx$, hoc est $yxxdx = a^2ydx - \frac{1}{4}y^3dx + \frac{3}{4}yxxdx$. Jam verò, quum habeatur $4aa - xx = yy$, habebitur differentiando $-xdx = ydy$, sive $xdx = -ydy$. Itaq; si in æquatione illâ loco xdx hic ejus valor substituatur, fiet tandem $yxxdx = a^2ydx - \frac{1}{4}y^3dx - \frac{3}{4}xyydy$.

Jam quantitatis hujus differentialis a^2ydx —

$-\frac{1}{4}y^3dx - \frac{3}{4}xyydy$ posteriores duo termini sunt perfectè integrabiles, quum oriantur, differentiando quartam partem hujus quantitatis $-xy^3$. Itaque tantùm restat, ut inveniatur integrale termini prioris a^2ydx. Et quidem, quum ydx sit valor areolæ EF*fe*, erit integrale ejus termini spatium circulare BEF multiplicatum per aa, hoc est per quadratum, quod fit ex semisse radii BD. Quocirca, si ex eo, quod oritur, multiplicando spatium circulare BEF per quadratum ex radio BD dimidiato, subducatur quarta pars quãtitatis xy^3, habebitur integrale quantitatis differentialis $yxxdx$.

Ex quo patet, elementa singula spatii circularis BEF, multiplicata per quadrata suarum à centro distantiarum, tantùm efficere, quantum valet productum ex ipsò spatio circulari BEF in quadratum ex semisse radii BD, multatum quartâ parte quantitatis xy^3. Jam verò, quum loco spatii circularis BEF sumitur ipse quadrans BDH, tunc evanescente DE$=x$, evanescit quoque quantitas xy^3. Itaque elementa singula quadrantis BDH, multiplicata per quadrata suarum à centro distantiarum, tantundem efficient, quantum ipse quadrans BDH ductus in quadratum ex radio BD dimidiato; & prope-

pterea, si elementa singula totius circuli BCF multiplicentur per quadrata, quæ fiunt ex distantiis suis à centro, tantundem simul efficient, quantum si ipsius circuli area multiplicetur per quadratum ex semisse radii BD.

Hoc lemmate præmisso, haud difficile modò erit generalis illius formulæ usum ostendere, pro inveniendo centro oscillationis figurarum solidarum. Sit enim MON figura aliqua plana, quæ revoluta circa axem suum OD producat figuram aliam solidam. Suspendatur solida ista figura ex puncto A, &
Fig. suas efficiat oscillationes circa axem EE.
102. Capiatur in axe figuræ OD punctum aliquod D, per quod agatur primò recta HL parallela axi oscillationis EE, tum planum horizontale, sive parallelum plano basis, efficiens sectionem circularem MHNL, & denique recta MN, quæ existens in hoc plano perpendicularis sit ad ipsam HL.

Itaque, quia recta HL parallela est axi oscillationis EE, singula ejus puncta, dum figura oscillabitur, eâdem velocitate movebuntur: proindeque perinde erit, ac si totum pondus ejus, sive etiam exigui rectanguli ei adjecentis collectum sit, & coacervatum in puncto D. Quumque eadem sit ratio de singulis rectis eidem EE, sive HL parallelis; idcircò pondera omnium elementorum sectio-

ctionis circularis MHNL supponi possunt collecta, & coacervata in punctis correspondentibus diametri MN. Verùm, quia diametri hujus MN puncta omnia nequaquam eâdem velocitate moventur, quum diameter ista non sit parallela axi oscillationis EE; nequeunt ulteriùs singula illa elementa considerari veluti collecta, & unita in centro D, ita ut haberi possit AD pro cujusq; distantiâ ab axe oscillationis, sed consideranda sunt ea in correspondentibus punctis diametri BC, quo eorum ab axe oscillationis distantiæ habeantur.

Hinc si dp designet unumquodque ex iis elementis, ponaturque ut supra AD $= x$, & distantia cujusque eorum elementorum à centro D $= y$: quia omnia dp uni eidemque x correspondent, erit summa omnium xdp productum, quod oritur, multiplicando totam sectionem circularem MHNL per AD, & summa omnium $xxdp$ id, quod producitur ex multiplicatione ejusdem sectionis circularis MHNL per AD quadratum. Sed quoniam eadem dp non uni, sed diversis y correspondent; summa omnium $yydp$ habebitur, si capiantur producta omnia, quæ fiunt ex singulis elementis sectionis circularis MHNL in quadrata suarum distantiarum à centro D; hoc est, per ostensum lemma, si ipsa sectio circularis MHNL multiplicetur

per

per quadratum, quod fit ex semisse radii DM, sive DN.

Quocirca si ponatur ulteriùs DM, sive DN $= u$, & ratio, quam habet diameter ad circuli circumferētiam statuatur, ut 1 ad a; erit circumferentia sectionis circularis MHNL $= 2au$, & ipsa ejus sectionis area $= auu$. Unde erit porrò summa omnium xdp, hoc est S. $xdp = axuu$ summa omnium $xxdp$, hoc est S. $xxdp = axxuu$, & summa omnium $yydp$, hoc est S. $yydp = \frac{1}{4} au^4$.

Inventis summis quantitatum differentialium xdp, $xxdp$, & $yydp$ in ordine ad sectionem circularem MHNL, si earum porrò unaquæque multiplicetur per dx, valorem altitudinis exigui cylindri insistentis super sectione illâ circulari, integralia quantitatum differentialium, quæ inde oriuntur, designabunt easdem illas summas in ordine ad figuram solidam, de qua agitur. Unde quemadmodū in sectione circulari MHNL distantia centri oscillationis ab axe habetur, dividendo $axxuu + \frac{1}{4} au^4$ per $axuu$, hoc est $4xx + uu$ per $4x$; ita in totâ figurâ solidâ eadem distantia habebitur, dividendo

S.

$S.\ axxuudx + \frac{1}{4} au^4dx$ per $S.\ axuudx$, hoc est

$S.\ 4xxuudx + u^4dx$ per $S.\ 4xuudx$.

Atque hæc quidem est applicatio formulæ illius generalis ad determinandum centrum oscillationis in figuris, tum planis, cùm solidis. Res nunc uno, aut uno altero exemplo majoris evidentiæ ergo esset ostendenda. Sed quoniam totum hoc negotium pendet ex calculo integrali, cujus regulas, ac præcepta qui benè callet, nullam in exemplis sibi fingendis difficultatem inveniet; ab hoc labore penitus nos abstinebimus, existimantes illud potiùs operæ pretium esse, identitatem, quæ est inter centrum oscillationis, & centrum percussionis, paulò breviter hoc loco ostensam exhibere.

Sanè identitatem istam non melius ostendi posse crediderim, quàm demonstrando distantiam centri percussionis ab axe, circa quem perficitur motus, eâdem omninò ratione determinari, ac definitur distantia centri oscillationis ab eodem axe: nimirum multiplicando singula pondera per quadrata suarum distantiarum ab axe prædicto, & dividendo summam omnium productorum, quæ inde oriuntur, per id, quod producitur ex multiplicatione eorundem ponderum per distantiam communis eorum gravitatis centri ab eodem axe.

Sint

Sint igitur B, & C duo quævis pondera, Fig. 204. quæ mediantibus virgis AB, BC, CA gravitatis expertibus componant machinam, quæ revolvatur subinde circa punctum A, ut axis motus, sive oscillationis EE rectus sit ad planum, quod conspicitur. Erunt itaque AB, AC distantiæ eorum ponderum ab axe motus. Quocirca, si ponatur ulteriùs, D esse commune centrum gravitatis eorum ponderum, & F centrum percussionis, hoc est id, in quo colligitur, & coacervatur momentum eorundem ponderum; res eò redibit, ut ostendamus pondera B, & C, multiplicata per quadrata, quæ fiunt ex AB, & AC, tantundem simul efficere, quantum si eadem pondera B, & C multiplicentur per rectangulum DAF.

Id autem in hunc modum ostendemus. Erigantur ex punctis B, & C rectæ BM, CM, ipsis AB, AC perpendiculares, quæ productæ si opus conveniant cum AD in punctis I, & L. Tum factis IM, LM æqualibus ipsis AB, AC, excitentur ex punctis illis super AD perpendiculares aliæ IN, LN, quæ conveniant in N cum rectis MN eidem AD parallelis. Et denique ex puncto F demittantur super ipsis BM, CM perpendiculares FG, FH.

Itaque per machinæ revolutionem pondera B, & C moventur velocitatibus, designatis

tis per rectas AB, AC, sive etiam per rectas IM, LM, iisque suas exercent actiones secundùm rectas BM, CM. Est autem ex hypothesi punctum F centrum percussionis, hoc est id, in quo æquilibrata manent momenta eorum ponderum. Igitur ob generale principium æquilibrii erit B. IM. FG = C. LM. FH: proindeque, quum ob triangula IMN, LMN similia triangulis FIG, FLH, sit IM. FG = IN. FI, itemque LM. FH = LN. FL; erit B.IN.FI = C.LN.FL.

Et quoniam est B.IN.FI = B.IN.AI — B. IN. AF, itemque C. LN. FL = C. LN. AF — C.LN.AL; erit B.IN.AI — B.IN.AF = C.LN.AF — C. LN. AL; atque adeò B.IN. AI + C. LN. AL = B. IN. AF + C. LN.AF. Jam verò demissis super AD perpendicularibus BO, CR, propter triangula ABO, ACR similia, & æqualia triangulis IMN, LMN, rectæ AO, AR æquales fiunt rectis IN, LN. Quare erit B.AO.AI + C.AR.AL, hoc est B. AB^2 + C.AC^2 = B.AO.AF + C.AR.AF.

Porro, quia D est commune centrum gravitatis ponderum B, & C; erit B. AO + C. AR = B.AD + C.AD; atque adeò multiplicatâ utrâque parte æquationis per AF, erit B.AO.AF + C.AR.AF = B.AD.AF + C.AD. AF. Ostensum est autem, esse B. AB^2 + C. AC^2 = B. AO.AF + C. AR.AF. Quare erit quoque B.AB^2 + C.AC^2 = B. AD. AF + C. AD.

AD.AF; & propterea pondera B, & C multiplicata per quadrata, quæ fiunt ex AB, & AC, tantundem efficient, quantum eadem pondera, multiplicata per rectāgulum DAF.

Eſt igitur centrum percuſſionis idem omnino cum centro oſcillationis; quandoquidem utriuſque diſtantia ab axe motus unâ, eâdemque ratione definitur. Hinc iiſdem illis formulis, quibus determinatur in figuris ſive planis, ſive ſolidis centrum oſcillationis, determinabitur etiam in iiſdem figuris centrum percuſſionis. Et ſicuti quum figuræ elementa omnia eâdem velocitate moventur, tunc centrum percuſſionis confunditur cum centro gravitatis; ita ſi fieri poſſit, ut figura aliqua ſubinde ſuas peragat oſcillationes, ut ejus elementa ſingula eâdem velocitate ferantur: (id quod non aliter contingere poteſt, quàm ſi punctum ſuſpenſionis abeat in infinitum;) tunc etiam inter centrum gravitatis, & centrum oſcillationis nulla erit differentia.

Verum, quod dicimus centrum oſcillationis unum, idemque eſſe cum centro percuſſionis, id tunc demum obtinet, quum gravitas ponitur conſtans, & uniformis, ita ut pondera corporum eorundem maſſis, ſive quantitatibus materiæ evadant proportionalia; nam in omni aliâ gravitatis hypotheſi, ut rectè adnotavit Hermannus

nus in suâ Phoronomiâ semper different ab invicem centrum oscillationis, & centrum percussionis; nec parum errant, qui duo ista centra, nullâ habitâ ratione gravitatis, statim identificant, atq; confundunt. Quod satis liquere potest, si fiat, ut pendulum compositum, cujus partes sint diversæ specificæ gravitatis, in fluido homogeneo suas perficiat oscillationes.

Circa centrum oscillationis illud etiam notatu dignum existimamus, quòd ipsum convertatur cum puncto suspensionis; adeò nempe, ut si pendulum compositum ex ponderibus B, & C, habeat in F centrum oscillationis, quum suspenditur ex A; existat deinde centrum illud in A, quum vicissim pendulum suspenditur ex F. Ad hoc autem ostendendum, præmittimus primùm hoc theorema, quòd si per commune centrum gravitatis ponderum, pendulum componentium, ducatur recta linea axi oscillationis parallela, & singula pondera multiplicentur per quadrata suarum distantiarum ab hac rectâ lineâ; quæ inde oriuntur producta simul sumpta applicata ad id, quod oritur, multiplicando summam ponderum omnium per distantiam inter axem oscillationis, & prædictam rectam lineam, dent intervallum, quo centrum oscillationis inferius est communi centro gravitatis eorum ponderum, Fig. 105.

 Sit

Sit itaque pendulum ABC, instructum ex duobus ponderibus B, & C, quorum commune centrum gravitatis sit D. Ponatur axis oscillationis EE rectus ad planum, quod conspicitur, ita ut sicuti AB, AC sunt distantiæ ponderum ab hoc axe, ita DB, DC sint distantiæ eorundem ponderum à rectâ lineâ, quæ ducitur per punctum D æquidistanter ipsi EE. Jamque, si F sit centrum oscillationis, ostendendum erit id, quod producitur, multiplicando pondera B, & C per quadrata rectarum DB, DC, applicatum ad id, quod oritur, multiplicando eadem pondera B, & C per AD, exhibere distantiam inter comune centrum gravitatis D, & centrum oscillationis F, adeòque esse $B.DB^2 + C.DC^2 = B.AD.DF + C.AD.DF$.

Istud igitur ostendemus hac ratione. Quoniam F est centrum oscillationis; erit $B.AB^2 + C.AC^2 = B.AD.AF + C.AD.AF$. Est autem (demissis super AD perpendicularibus BO, CR) $AB^2 = BD^2 + AD^2 + 2ADO$, itemque $AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2ADR$. Itaque, quum sit etiam $AD.AF = AD^2 + AD.DF$, erit, debitis substitutionibus peractis, $B.\overline{BD^2 + AD^2 + 2ADO} + C.\overline{CD^2 + AD^2 - 2ADR} = \overline{B + C}.\overline{AD^2 + AD.DF}$; hoc est $B.BD^2 + B.2ADO + C.CD^2 - C.2ADR = B.AD.DF + C.AD.DF$.

Et

Et quoniam D est commune centrum gravitatis ponderum B, & C; erit B.DO = C.DR: adeòque multiplicatâ utrâque parte æquationis per 2AD, erit B. 2ADO = C. 2ADR. Unde, quum in æquatione $B.BD^2 + B.2ADO + C.CD^2 - C.2ADR = B.AD.DF + C.AD.DF$ duo termini æquales B. 2ADO — C.2ADR contrarietate signorum se mutuò destruant, supererit $B.BD^2 + C.CD^2 = B.AD.DF + C.AD.DF$, hoc est id, quod fit, multiplicando pondera B, & C per quadrata ipsarum BD, CD, æquale ei, quod oritur, multiplicando summam eorundem ponderum per rectangulum ADF.

Idem autem verum est quoque, si axis oscillationis EE non sit rectus ad planum, quod conspicitur, sed in eo jaceat totus. Nam, quum in hoc casu distantiæ ponderum ab axe oscillationis EE jaceant in directũ cum distãtiis eorundem ponderũ à rectâ, quæ ducitur per punctum D æquidistanter ipsi EE, & cum iis constituant duas rectas æquales tum inter se, cùm ipsi AD; id, quod evincitur per duodecimam, & decimamtertiam secundi Elementorum Euclidis, ostendetur per quartam, & septimam ejusdem libri, in quas vertuntur duæ illæ propositiones, quum vertex trianguli ad basim accedit.

Hoc posito theoremate haud difficile mo-

dò erit id, quod erat præcipuum, ostendere: nimirum, punctum suspensionis A, & centrum oscillationis F ad invicem converti. Nam quemadmodum, si pendulum suspendatur ex A, invenietur intervallum, quo centrum oscillationis F humilius est communi centro gravitatis D, dividendo $B.BD^2 + C.CD^2$ per $B.AD + C.AD$; ita quoque si idem pendulum suspendatur ex F, habebitur intervallum, quo centrum oscillationis depressius est communi centro gravitatis D, dividendo $B.BD^2 + C.CD^2$ per $B.DF + C.DF$. Est autem $B.BD^2 + C.CD^2 = B.AD.DF + C.AD.DF$. Itaque id, quod oritur, dividendo $B.BD^2 + C.CD^2$ per $B.DF + C.DF$ erit AD; & consequenter, quum pendulum suspenditur ex F, erit A centrum oscillationis.

Sed ex ostenso theoremate illud etiam colligi potest, quod si idem pendulum compositum nunc breviùs, nunc longiùs suspensum agitetur, distantiæ punctorum suspensionis à communi centro gravitatis sint inter se in ratione reciprocâ ejus, quam habent distantiæ centrorum oscillationis ab eodem communi gravitatis centro. Sit enim centrum oscillationis penduli, ex ponderibus A, & B compositi, F quidem, quum suspenditur ex A, f verò, quum suspenditur ex a. Dico AD esse ad aD, ut est Df ad DF.

Quo-

Quoniam enim, quum pendulum ex A ſupenditur, F eſt centrum oſcillationis, erit $B.BD^2 + C.CD^2 = B.AD.DF + C.AD.DF$. Atque ita quoque, quia penduli ex *a* ſuſpenſi *f* eſt oſcillationis centrum, erit $B.BD^2 + C.CD^2 = B.aD.Df + C.aD.Df$. Unde erit $B.AD.DF + C.AD.DF = B.aD.Df + C.aD.Df$: propterea que, quia diviſâ utrâque parte æquationis per $B + C$, habetur $AD.DF. = aD.Df$, erit ut AD ad *a*D, ita D*f* ad DF.

CAP. IX.

De lineâ celerrimi deſcenſus, in quacumque gravitatis hypotheſi.

Circa deſcenſum gravium propoſita ſunt, & reſoluta à Recentioribus Geometris plura alia, eaque valde elegantia problemata. Inter hæc celebre eſt illud, à Galilæo primum quæſitum, tum deinde Geometris propoſitum à Johanne Bernoullio ineunte anno 1696, & à Viris Celeberrimis Newtono, Leibnitio, Jacobo Bernoullio, & Hoſpitalio ſequenti anno ſolutum: nimirum, ut inter duo data puncta, in eâdem rectâ verticali non exiſtentia, inveniatur linea, per quam grave corpus proprio pondere deſcendens, breviſſimo tempore eam percurrat.

Ut hoc problema resolvamus, præmittendum est prius hoc theorema; quòd si mobile ab A ad C percurrere debeat spatia duo, per rectam KF à se mutuò divisa, primum quidem velocitate X, alterum velocitate Z, sintque rectæ duæ AB, BC taliter ad illam inclinatæ, ut erecto per punctum B perpendiculo PQ sit, ut X ad Z, ita sinus anguli ABP ad sinum anguli CBQ; quòd inquam iter à mobili faciendum, quò breviori tempore illud absolvat, sit per rectas AB, BC.

Fig. 106.

Hoc theoremate usus est olim Petrus Fermatius, Senator Tolosanus, ad inveniendam legem, qua radii lucis refranguntur, ratus naturam in suis functionibus peragendis brevissimum semper tempus impendere. Sed hoc idem in simili negotio usurpavit quoque Christianus Hugenius in tractatu suo de lumine gallicè scripto, cujus hanc attulit demonstrationem. Ponamus primò mobile ab A ad C iter suum instituere per alias quasvis rectas AF, FG, ita ut punctum F sit magis distans ab A, quàm punctum B.

Ducatur FO ipsi AB parallela, & fiat AO perpendicularis super AB, BH perpendicularis super FO, & FG perpendicularis super BC. Itaque, quia rectus est tam angulus KBP, quàm angulus ABH, erit angulus ABK æqualis angulo PBH, adeòque angulus

lus ABP æqualis angulo HBF. Eſt autem, propter perpendicularem FG, angulus CBQ æqualis angulo BFG. Quare erit, ut X ad Z, ita ſinus anguli HBF ad ſinum anguli BFG. Jam verò ſinus horum angulorum, aſſumptâ BF pro radio, ſive ſinu toto, ſunt rectæ FH, BG. Itaque erit, ut X ad Z, ita FH ad ad BG, & propterea eodem tempore percurretur FH velocitate X, ac BG velocitate Z. Eſt autem tempus per AB æquale tempori per OH, & tempus per GC brevius tempore per FG. Quare erit tempus per AB, BC brevius tempore per OF, FC, & conſequenter multò brevius tempore per AF, FC.

Ponamus ſecundò, mobile ab A ad C inſtituere iter ſuū per rectas AK, KC, ita ut punctum K ſit minus diſtans ab A, quàm punctum F. Ducatur KN ipſi BC parallela, ſitque CN perpendicularis ſuper BC, BM perpendicularis ſuper KN, & KL perpendicularis ſuper AB. Itaque, quia rectus eſt tam angulus KBQ, quàm angulus MBC, dempto communi MBQ, erit angulus MBK æqualis angulo CBQ. Eſt autem, propter perpendicularem KL, angulus BKL æqualis angulo ABP. Quare erit, ut X ad Z, ita ſinus anguli BKL ad ſinum anguli MBK. Jam verò ſinus horum angulorum, aſſumptâ BK pro radio, ſive ſinu toto, ſunt rectæ BL, KM. Itaque erit, ut X ad Z, ita BL ad KM,

& propterea eodem tempore percurretur BL velocitate X ; ac KM velocitate Z. Est autem tempus per BC æquale tempori per MN, & tempus per AL brevius tempore per AK. Quare erit tempus per AB, BC brevius tempore per AK, KM, atque adeò multò brevius tempore per AB, BC.

Non dissimili ratiocinio ostendetur idem theorema, si plura, quàm duo, fuerint spatia diversis velocitatibus à mobili peragẽda. Ex quo patet ; iter obliquũ brevissimo tempore expediendum à puncto ad punctum tunc tantùm per rectam punctis illis interceptam institui debere, quum per totum iter eâdem semper velocitate corpus mobile fertur. Veruntamen, si in itinere illo peragendo debeat corpus per plura media diversæ constitutionis transire, ita ut diversimodè mobili resistentia efficiant, ut non eâdem sed diversis velocitatibus per ea feratur; tunc quò brevissimum tempus ad iter illud absolvendum impendatur, consultiùs erit motum subinde inflectere, ut in unoquoque medio sinus anguli, quem linea motus constituit cum perpendiculari ad medii superficiem erectâ, sit ut velocitas, cùm qua

FIG. per medium illud corpus mobile fertur.

107. Atque hinc etiam, quum corpus à puncto A ad punctum N obliquè descendere debet, quia singulis momentis nova acquirie

ve-

velocitatis incrementa, fiet descensus tempore brevissimo, si decidat per talem curvam AMN, ut velocitas, quam reperitur habere in quolibet loco M, sit ut sinus anguli, quem cum verticali MO constituit portio curvæ AM, sive etiam tangens ejus MT. Unde datâ specie gravitatis, vel quod idem est, datâ lege accelerationis, facile erit naturam ejus curvæ definire; & vicissim datâ curvæ naturâ, nullo negotio determinari poterit lex accelerationis, quæ requiritur, ad hoc, ut curva illa brevissimo tempore percurratur.

Ut si ponamus, exempli gratiâ, curvam AMN esse semicycloidem; aut etiam portionem semicycloidis AMB, descriptæ per revolutionem semicirculi BEC super rectâ horizontali AC; quia tangens MT parallela est chordæ BE erit angulus TMO æqualis angulo CBE; adeòque velocitas, quam grave habet in puncto M, erit, ut sinus anguli CBE, hoc est, ut recta CE, si BC velut radius, sive sinus totus assumatur. Est autem, propter semicirculum, recta CE, ut radix altitudinis MO. Itaque eadem velocitas in loco M erit in subduplicatâ ratione ipsius MO; proindeque erit semicyclois curva celerrimi descensus in hypothesi gravitatis constantis, nempe quum grave subinde motum suum accelerat, ut velocitas acquisita

sit a

ſit, ut radix altitudinis, per quam deſcendendo velocitatem illam ſibi comparavit.

Similiter ſi curva AMN ſit quadrans, aut portio quadrantis AMB, cujus centrum ſit punctum C, quia angulus TMO æqualis eſt angulo ACM, erit velocitas in loco M, ut ſinus anguli ACM, hoc eſt ut altitudo MO; adeòque erit quadrans circuli lineà celerrimi deſcenſus, ſi grave ſubinde motum ſuum acceleret, ut velocitas acquiſita ſit, ut altitudo, per quam deſcendendo velocitatem illam acquiſivit. Ex quo patet, deceptum eſſe magnum Galilæum, qui in conſtanti ſuâ gravitatis hypotheſi lineam celerrimi deſcenſus putavit eſſe circumferentiam maximi circuli.

Itaque poſito, quod vis gravitatis agat in corpora gravia eâdem, & conſtanti ratione, lineà celerrimi deſcenſus erit ſemicyclois, aut etiam portio ſemicycloidis, verticem deorſum ſpectantem habentis. Sed notatu hìc dignum exiſtimamus, ſemicycloidem AMB, aut quamlibet ejus portionem, (quæ etiam ſemicycloide ipsâ major eſſe poteſt,) tunc demum huic problemati inſervire, quum ab A ſit motus initium, aut etiam à quolibet ejus puncto M, ſed cum eâ velocitate, quæ acquiritur cadendo per MO. Nam ſi utique ab M ad B ferri debeat grave corpus, & ex M nullâ velocitate incipiat deſcen-

scendere ; tunc oportebit semicycloidem aliam describere, quæ incipiens à puncto M transeat per punctum B.

Id autem qua ratione fiat, docuit Johannes Bernoullius in actis Lipsiensibus anni 1696: nimirum, si ductâ horizontali MH, describatur super eâ, tamquam basi, semicyclois MKL, cujus HIL sit semicirculus genitor; nam, si deinde jungantur puncta M, & B per rectam MB, quæ secet descriptam semicycloidem in K, & fiat, ut MK ad MB, ita MH ad MP, aut etiam ita HL ad PR, semicyclois MR, quæ describitur per revolutionem semicirculi PQR, transibit per punctum B. Fig. 108.

Neque verò difficile id erit ostendere. Nam, quum sit, ut MK ad MB, ita MH ad MP, & ita HL ad PR; recta MR transibit per punctum L. Unde, quum porrò habeatur, ut MK ad MB, ita ML ad MR; parallelæ erunt rectæ lineæ KL, BR; adeòque ductis horizontalibus KS, BT, similia erunt triangula KLS, BRT; eritque proinde, ut KL ad BR, hoc est, ut MK ad MB, sive etiam ut HS ad PT, ita KS ad BT. Jam verò, quum HL, PR sectæ sint proportionaliter in punctis S, & T, HS est ad PT, ut SI ad TQ. Itaque erit ex æquali, ut KS ad BT, ita SI ad TQ, atque adeò permutando, dividendo, & iterum permutando erit, ut KI ad BQ, ita SI ad

ad TQ. Est autem, ut SI ad TQ, ita arcus LI ad arcum RQ. Quare erit rursus ex æquali, ut KI ad BQ, ita arcus LI ad arcum RQ; & propterea, quum propter semicycloidem MKL arcus LI æqualis sit rectæ KI, erit etiam arcus RQ æqualis rectæ BQ; adeòque punctum B erit in semicycloide MBR.

Obiter autem notetur hoc loco velim, quod si fuerint duæ semicycloides MKL, MBR, quæ incipientes ab eodem puncto M habeant bases suas super eâdem rectâ MP, & ducatur ex puncto M recta aliqua MKB, quæ secet utramque semicycloidem in punctis K, & B, quòd inquam interceptæ semicycloidum portiones MK, MB sint similes inter se, ita nempe, ut portio MK sit ad portionem MB, veluti est semicyclois MKL ad semicycloidem MBR. Sunt enim semicycloides MKL, MBR duplæ diametrorum HL, PR, & portiones KL, BR duplæ chordarum IL, QR. Itaque, quia HL est ad PR, ut IL ad QR; erit etiam, ut MKL ad MBR, ita KL ad BR, & ita MK ad MB.

Jacobus Bernoullius, postquam problematis à Fratre propositi solutionem exhibuerit, aliud circa eandem materiam protulit, quod illius consectarium esse videtur: nimirum omnium cycloidum, quæ incipientes ab eodem puncto M secent eandem lineam verticalem HV determi-

nare

nare eam, per quam grave corpus descendendo, perveniat à puncto M ad lineam illam verticalem tempore brevissimo. Solutum porrò fuit hoc problema ab utroque Bernoulliorum, quorum in speculationibus hisce geometricis alter alteri, ut ita dicam, invidebat; & uterque invenit cycloidem quæsitam esse illam, quæ incipiens à puncto M habet positionem sui axis super ipsâ rectâ verticali datâ HV, veluti est cyclois MKL. Verum Johannes problema à Fratre propositum ad majorem universalitatem evexit, nimirum etiam, quum recta data non est verticalis, sed utcumque ad horizontem inclinata.

Quocirca, ut in majori istâ universalitate problema hoc alterum resolvamus, ostendendum est priùs hoc theorema; quod tempus descensus per quemlibet cycloidis arcum, sit ut arcus correspondens circuli genitoris directè, & radix diametri ejusdem circuli inversè. Sit itaque semicyclois AMB cujus basis sit recta horizontalis AC, axis recta verticalis BC, & BEC semicirclus genitor. Capiatur in perimetro semicyclois portio M*m* indefinitè parva, & ductis ME, *me* ipsi AC parallelis, jungantur chordæ BE, CE, C*e*. Igitur, quum grave corpus descendit per AM, velocitas, quam in puncto M reperitur habere, erit ut radix altitudinis MO, hoc FIG. 107.

hoc eſt propter ſemicirculum, ut chorda CE directè, & radix diametri BC inversè. Eſt autem tempus per Mm, ut Mm directè, & velocitas illa inversè. Itaque, quia Mm in omni cycloide datam habet rationem cum EX, idem tempus per Mm erit, ut EX directè, radix ipſius BC etiam directè, & CE inversè.

Jam angulus EXe, nihil vetat, quominus tamquam rectus conſideretur. Quare, quum angulus EeX æqualis ſit angulo EBC, ſimilia erunt triangula rectangula EXE, CEB; eritque adeò, ut Ee ad BC, ita EX ad CE. Tempus itaque per Mm, quod eſt ut EX directè, radix ipſius BC etiam directè, & CE inversè, erit ut Ee directè, & radix ipſius BC inversè. Quumque eadem ſit demonſtratio de ſingulis portionibus, quæ in ſemicycloïdis perimetro ſumuntur; conſequens eſt, ut tempus deſcenſus per arcum cycloidis AM, ſit ut arcus correſpondens ſemicirculi genitoris CE directè, & radix diametri BC inversè.

Fig. 108. Huic verò conſequens eſt, ut tempora deſcenſus per arcus ſimiles cycloidum MB, MK ſint, ut radices diametrorum PR, HL. Nam ex theoremate mox oſtenſo tempora per MB, MK ſunt, ut arcus PQ, HI directè, & radices diametrorum PR, HL inversè. Jam verò, propter arcus cycloidum ſimiles

miles MB, MK, similes sunt etiam arcus circulorum PQ, HI; adeòque, ut est PQ, ad HI, ita est PR ad HL. Quare ex æquali tempora descensus per arcus similes cycloidum MB, MK erunt, ut diametri PR, HL directè, & radices earundem diametrorum inversè, hoc est ut ipsæ radices diametrorum PR, HL directè.

His præmissis, esto nunc MH linea horizontalis, & HB linea alia, ad eam utcumque inclinata. Sint porrò MKL, MBR plures cycloides, quæ incipientes à puncto M, habeant omnes bases suas super eadem MH; & oporteat inter cycloides istas determinare eam, per quam grave corpus ex M descendens, accedat ad lineam positione datam HB breviori tempore, quàm si per cycloidem aliam descenderet.

Sit MKL cyclois talis, cujus basis sit ipsa recta MH; secet autem circumferentiam sui circuli genitoris HIL recta linea positione data HB in puncto I, per quod agatur recta KS parallela ipsi MH, quæ cycloidi MKL occurrat in K. Tum jungantur puncta M, &, K per rectam MK, quæ producta occurrat ipsi HB in puncto B. Dico cycloidem MBR, quæ transit per punctum B, eam esse, quam quærimus.

Est enim maximorum, & minimorum ea natura, ut quum nec illa augeri, nec mi-

nui

nui ista amplius possint, amborum differentialis expressio debeat nihilum adæquare. Notum est autem, eas tantùm quantitates differentiatas nihilo æquales esse, quæ magnitudinibus datis, sive constantibus exprimuntur. Itaque inter omnes ejusdem speciei quantitates, quæ maximum, vel minimum admittunt, si aliqua sit, eaque sola, quæ per magnitudines datas, sive constantes exprimitur, ea erit omnium maxima, vel minima.

Hinc igitur fit, ut accedet grave corpus ex puncto M ad rectam positione datam HB breviori tempore per cycloidem MBR, quàm per aliam quamvis, si utique ostendi possit datum esse tempus per arcũ MB, nec tempus per alterius cycloidis arcum datum esse. Id autem ostendemus in hunc modũ. Quoniam recta MH basis semicycloidis MKL magnitudine, & positione data est; dabitur etiam magnitudine, & positione ejus semicirculus genitor HIL: proindeque, quia recta HB data est positione, dabitur etiam positione tam punctum I, quàm punctum K, adeòque dabuntur magnitudine tam arcus HI, IL, quàm rectæ MK, MB.

Et quoniam tempus per arcum cycloidis MK est, ut arcus semicirculi genitoris HI directè, & radix suæ diametri HL inversè, dabitur tempus per arcum MK. Sed tempus per

per arcum MK eſt ad tempus per arcum ſimilem MB in ſubduplicatâ ratione diametrorum HL, PR, ſive etiam in ſubduplicatâ ratione rectarum MK, MB. Quare, quum data ſit ratio iſta ſubduplicata, dabitur etiam ratio, quam habet tempus per arcum MK ad tempus per arcum MB. Oſtenſum eſt autem, datum eſſe tempus per arcum MK. Et igitur erit quoque datum tempus per arcum MB: proptereaque, quia tempus per alterius cycloidis arcum conſimilem nequaquam eſt datum, ut rem attentè conſideranti liquidò patet; ex antea dictis illud omnium brevius erit.

Ponamus jam rectam HB verticalem eſſe, adeòque erectam ad horizontalem MH, ita ut coincidat cum ipsâ HV. Accedent igitur ad invicem puncta tria B, K, I, & ſingula coincident cum puncto L. Unde, quum in hoc caſu cyclois MBR coincidat cum cycloide MKL; erit ipſa cyclois MKL ea, per quam problemati fit ſatis. Cæterùm, ſi concipiamus, rectam poſitione datam HP revolvi circa punctum H ab HP uſq; ad HM, ita ut omnes poſitiones poſſibiles referat; locus omnium punctorum B, in quibus eam ſecant in omni poſitione arcus celerrimi deſcenſus, erit ſpiralis HOBM, cujus ea eſt proprietas, ut radius HB ſit ad ejus portio-

 nem

nem circulo interceptam HI, veluti est semicircumferentia HIL ad arcum HI: cujus rei, à Domino Saurin in Schediasmate suo inserto Monumentis Regiæ Scientiarum Academiæ Parisiensis anni 1709 primum adnotatæ, demonstrationem velut facillimam, & cuique obviam præmittendam existimamus.

Hoc idem problema clarissimi Fratres ad majorē adhuc universalitatem perduxerunt; nimirum etiam in casu, quum linea positione data non est recta, sed curva quævis geometrica. Quin imò, quia numquam novit natura limitem, eò etiam progressi sunt, ut quod de cycloidibus primum quærebatur, deinde ad curvas alias, quæ similes essent inter se, extenderetur. Verū nescio, num ad rem sit, Tyrones nostros ad subtiliores hasce inquisitiones manuducere. Quocirca rem experiemur in unico tantùm casu, eoq; omnium simplicissimo, nimirum, quum lineæ datæ sunt rectæ, & ea, ad quam accedere debet grave corpus, est etiam recta.

Fig. 109. Detur itaque in lineâ horizontali MH punctum aliquod M, sitque HB recta positione data; & oporteat, determinare rectam ML, per quam grave corpus descendens perveniat ex M ad ipsam HB breviori tempore, quàm si per aliam rectam lineam descenderet. Ducatur verticalis MB, quæ conveniat

niat cum rectâ positione datâ HB in puncto B, tum super MB describatur semicirculus MNB, qui eandem rectam HB secet in N. Dico rectam ML, quæ dividet angulum BMN bifariam, eam esse, quam quærimus.

Ponamus enim rectam ML reverà talem esse, ut portio ejus MI percurratur tempore brevissimo. Itaque, quia tempus per MI est omnium minimum, exprimetur illud quantitatibus datis, sive constantibus. Est autem tempus per MI ad tempus per ML in subduplicatâ ratione rectarum MI, ML. Itaque, quum datum sit tempus per ML, dabitur quoque ratio subduplicatâ rectarum MI, ML: proindeque, si ducatur recta alia M*il* priori indefinitè proxima, subduplicata ratio rectarum M*i*, M*l* adhuc manebit eadem. Est igitur, ut MI ad ML, ita M*i* ad M*l*. Quare tangens in puncto L, quæ habetur producendo L*l*, parallela erit chordæ BN; adeòque, quum æquales sint arcus hinc inde positi BL, LN, secabitur angulus BMN bifariam per rectam, quam quærimus, ML.

Sit jam recta HB verticalis, adeòque erecta ad horizontalem MH, ita ut parallela fiat ipsi MB. Et quoniam in hoc casu punctum B abit in infinitum, augebitur etiam in infinitum semicirculus MNB. Unde, quum portio ejus MN fiat indefinitè parva, evanescet angulus HMN; adeòque recta, quam

Dd 2 quæ-

quærimus, ML secabit bifariam totum angulum BMH; id quod etiam exinde colligi potest, quia ex constructione generali angulus MIH æqualis oritur angulo IMH. Hinc enim fit, ut quotiescumque rectus ponitur angulus MHI, ad conservandam eorum angulorum æqualitatem, debeat uterque illorum esse semirectus.

Cæterùm, si hic quoque concipiamus, rectam positione datam HB revolvi circa punctum H, ita ut revolutione istâ omnes positiones possibiles acquirat, locus omnium punctorum I invenietur esse circuli circumferentia, descripta ex puncto H tamquam centro, intervalloque HM. Neque etiam difficilis erit hujus rei demonstratio; quandoquidem, propter æquales angulos MIH, IMH, æquales sunt semper rectæ HM, HI.

SECTIO IV.

De Motu Gravium Violento.

Reliquum jam est, ut de motu gravium violento sermonem instituamus. Dicuntur autem violento motu gravia moveri, quotiescumque ita quidem feruntur, ut cum vi centripetâ gravitatis agat etiam vis centrifuga, ex motu projectili or-

orta. De hoc gravium motu tractavit magnus Galilæus, sub titulo de motu projectorum. Verum, quum in eâ tantùm hypothesi constiterit, quæ gravitatem ponit constantem, & invariatam; Recentiores, ulteriùs progressi, generaliter in quacumque gravitatis hypothesi eandem materiam pertractarunt. Quod etsi etiam à Nobis hoc loco præstandum sit; ad rem tamen existimamus ea, quæ obtinent circa motum projectorum in hypothesi gravitatis constantis, speciatim primum definire.

C A P. I.

De motu projectorum in hypothesi gravitatis constantis.

GRave corpus si sursum, vel deorsum directè projiciatur, in quacumque gravitatis hypothesi, movebitur semper in rectâ lineâ; quia secundùm eandem lineam verticalem agit, tam vis centripeta gravitatis, quàm vis centrifuga, quæ oritur ex motu projectili. Sed non perinde res est, si secundùm directionem horizontalem, vel aliam quamvis ad horizontem inclinatam projiciatur; nam quum in hoc casu duæ illæ vires agant in corpus, secundum diversas rectas lineas, per notissimam earum composi-

tionem, curvam quandam motu suo grave describet.

Projiciatur etenim grave corpus ex A secundùm directionem AC. Jam si nulla alia vis adesset, in eâdem rectâ, eâdem velocitate, per leges naturæ notas, semper progrederetur; & æqualibus temporibus describeret æqualia spatia AB, BC. Diviso itaque tempore in particulas æquales, agat vis gravitatis post primam temporis particulam, ubi corpus in B pervenit, efficiatque, ut eodem tempore, quo describeret BC, rectà descendat per BD. Quia ergo eodem tempore urgetur corpus duobus motibus BC, BD, completo parallelogrammo BCED feretur corpus tempore illo per diagonalem parallelogrammi hujus BE.

Fig. 110.

Eâdem ratione, si vis gravitatis desisteret, corpus tertiâ temporis particulâ describeret rectam EF æqualem ipsi BE. Quocirca, si in puncto E agat vis gravitatis secundâ vice, faciatque, ut corpus rectà descendat per EG eodẽ tempore, quo describeret EF; completo parallelogrammo EFHG, movebitur corpus per diagonalem EH. Atque ita quoque, si in puncto H iterum agat vis gravitatis, & efficiat, ut corpus rectà descendat per HL eodem tempore, quo vi illâ desistente describeret rectam HI æqualem ipsi EH; feretur corpus quartâ temporis particulâ per dia-

go-

gonalem HK parallelogrammi HIKL.

Hac igitur lege movebitur grave corpus per perimetrum polygoni ABEHK. Diminuantur jam in infinitum singulæ temporis particulæ, quibus vim gravitatis agere posuimus, & augeatur etiam in infinitum ipsorum numerus. Quumque hac ratione latera polygoni in infinitum minuantur, eorumque numerus in infinitum etiam augeatur; vertetur polygoni perimeter in curvam, adeòque grave corpus continuâ gravitatis actione per curvam istam movebitur.

Jam primum, quod quæritur circa motum projectorum, est determinatio ejus curvæ, per quam mobile fertur, quum projicitur secundùm lineam, vel horizontalem, vel utcumque ad horizontem inclinatam. Hæc curva, in hypothesi gravitatis constantis, quæ efficit, ut spatia, ab initio motus computata, sint ut quadrata temporum, quamque dumtaxat hoc capite expēdendam nobis proposuimus, est semper linea parabolica. Projiciatur etenim grave corpus secundùm rectam AC, quæ sit vel horizontalis, vel utcumque ad horizontem inclinata. Dico gravis semitam fore curvam semiparabolicam. Fig. 111.

Namque, si vis gravitatis non adesset, nec aer motui projecti obstaret, (quod postre-

mum semper supponitur;) projectum pergeret motu æquabili eâdem semper directione, essentque tempora, quibus percurruntur spatii partes AB, AC, AD, AE, ut ipsa spatia percursa respectivè. Jam accedente vi gravitatis, ob continuam ejus actionem, grave indesinenter deflectet à rectâ AE, & spatia descensus, seu deviationes à lineâ illâ AE eædem erunt, ac si descenderet per verticalem AI.

Sint itaque AF, AG, AH, AI spatia, quæ per vim gravitatis describit corpus interea, ac motu projectili percurrit æquabiliter spatia AB, AC, AD, AE, eruntque spatia AF, AG, AH, AI, ut quadrata temporum, sive etiam, ut quadrata rectarum AB, AC, AD, AE temporibus illis proportionalium, hoc est completis parallelogrammis AK, AL, AM, AN, ut quadrata ordinatarum FK, GL, HM, IN.

Est autem, per compositionem motuum, AKLMN semita, per quam fertur projectum; quum nec motus projectilis impediat vim gravitatis, nec vis gravitatis impedimento sit motui projectili. Quare semita projecti erit talis naturæ, ut quadrata ordinatarum FK, GL, HM, IN sint, ut abscissæ correspondentes AF, AG, AH, AI: proindeque erit curva semiparabolica, quum soli parabolæ competat, ut ordinatæ sint inter

se

ſe in ſubduplicatâ ratione abſciſſarum correſpondentium.

Obtinet porrò demonſtratio, ſive linea AC, ſecundùm quam projicitur grave corpus, ſit horizontalis, ſive utcumque ad horizontem inclinata. Id tantùm notatu dignum exiſtimamus, quòd quum linea AC eſt horizontalis, ordinatæ parabolæ rectos angulos conſtituunt cum ſuis abſciſſis, adeòque AI eſt axis parabolæ. Sed non perinde res eſt, quum AC inclinatur ad horizontem, quia hoc caſu ordinatæ cum ſuis abſciſſis conſtituunt angulos obliquos, adeòque AI eſt tantùm diameter parabolæ. Verùm utroque caſu AC contingit parabolam in A, utpote quæ parallela eſt ordinatis ipſius AI.

Liquet etiam ex ipsâ demonſtratione, parabolæ projecti motu deſcriptæ majorem, vel minorem amplitudinem pendere à majori, vel minori velocitate, quacum mobile à projiciente manu projicitur. Nam major, aut minor parabolæ amplitudo dependet ex majori, aut minori longitudine ordinatarum FK, GL, HM, IN, quæ correſpondent datis abſciſſis AF, AG, AH, AI: & profectò ordinatæ iſtæ, quum ſint æquales ipſis AB, AC, AD, AE, quæ datis temporibus projectili motu deſcribuntur, eò evadunt majores, quò majori velocitate projicitur mobile; nam ſpatium dato tempore deſcriptum eò ma-

majus est, quò major est velocitas, qua mobile movetur.

Quum itaque parabolæ amplitudo dependeat ex velocitate mobili impressâ, non abs re erit inquirere, quænam velocitas imprimi debeat mobili, ut possit datam parabolam describere. Quocirca datâ parabolâ AMN, cujus diameter sit recta verticalis AI, parameter hujus diametri recta AE, datum quemvis angulum constituens cum AI, & ordinatæ ejusdem diametri æquidistantes ipsi AE, sequens problema resolvendum nobis proponimus: invenire altitudinem AO, per quam grave descendens acquirat in A talem velocitatem, ut si eâ projiciatur secundùm rectam AE, describat motu suo parabolam datam.

Hoc autem problema facili negotio resolvemus, si ejus recordemur, quod de descensu gravium superiùs à nobis ostensum est: nimirum spatium à gravi in dato tempore cadendo descriptum dimidium esse ejus, quod eodem tempore describeret, si velocitate finali æquabiliter moveretur. Hinc enim fit, ut si problema jam resolutum supponamus, sitque AO altitudo quæsita, & ponamus insuper spatium super rectâ AE velocitate acquisitâ æquabiliter eodem tempore percursum esse rectam AB; erit AB dupla ipsius AO.

Jam

Jam verò in eodem tempore, per solam vim gravitatis, describi debet spatium alterum æquale ipsi AO in rectâ lineâ verticali AI. Itaque si compleatur parallelogrammum ABKF, erit AF æqualis AO, atque adeò FK dupla ipsius AF. Est autem ob parabolæ naturam, ut AE ad FK, ita FK ad AF. Quare erit etiam AE dupla ipsius FK, sive AB, & consequenter quadrupla altitudinis quæsitæ AO. Ex quo patet, altitudinem AO inventam iri, si constituatur æqualis quartæ parti ipsius AE.

Hinc, si gravia sursum obliquè projiciantur, & sistatur motus ipsorum ad eandem lineam horizontalem, ex qua initium habuit, facile erit id omne determinare, quod ad motum spectat istiusmodi projectorum. In hac siquidem projectione quatuor considerari possunt, velocitas, amplitudo, altitudo, & angulus projectionis. Ita, si AKL sit semita talis projecti, designabit recta AO altitudinem, per quam grave corpus descendere debet, ut velocitatem acquirat, quæ in projectione requiritur; recta AL amplitudinem projectionis; recta IK, quæ bisecat ipsam AL, altitudinem ejusdem projectionis, & CAL angulum, quem constituit cum horizonte linea, per quam grave corpus projici debet. Unde patet, circa talium projectorum motum sex principaliora problemata institui posse. FIG. 112.

Pri-

Primum est, quum datis velocitate, & amplitudine projectionis, quæritur altitudo unà cum angulo. Secundum, quum datis velocitate, & altitudine projectionis, quæruntur angulus, & amplitudo. Tertium, quum datis velocitate, & angulo projectionis, quæruntur altitudo, & amplitudo. Quartum, quum datis amplitudine, & altitudine, quæritur velocitas unà cum angulo. Quintum, quum datis amplitudine, & angulo, quæruntur velocitas, & altitudo. Ac sextum denique, quum datis angulo, & altitudine, velocitatem, & amplitudinem oportet invenire.

Jam si ex puncto L perpendicularis erigatur LC, quæ ipsi AC occurrat in C, atq; huic porrò ad rectos angulos excitetur CD, quæ conveniat cum AO in pũcto D, erit AD, quadrupla ipsius AO. Nam quum AO sit quarta pars parametri, quæ refertur ad punctum A, erit AC, sive GL quadratũ æquale rectãgulo, quod fit ex AG, sive CL in quadruplum ipsius AO. Sed, propter triangulum rectangulum ACD, idem AC quadratum est æquale rectangulo, quod fit ex CL in AD. Itaque erit AD æqualis quadruplo ipsius AO.

Sed, quemadmodum in triangulo rectangulo ACD hypothenusa AD est quadrupla rectæ lineæ AO, quæ determinat velocitatem projectionis, ita si demittatur perpendicu-

lum

lum CF, erit portio AF quadrupla rectæ IK, quæ ejusdem projectionis altitudinem definit. Nam sicuti AL est dupla ipsius AI, ita erit CL dupla ipsius BI. Sed, quum CL sit ad BK, ut est AC quadratum ad AB quadratum, sive etiam, ut est CL quadratum ad BI quadratum, eadem CL est quadrupla ipsius BK. Itaque bisecta erit BI in K; & propterea sicuti CL, sive AF est quadrupla portionis BK, ita quoque erit quadrupla alterius portionis IK.

Hinc, quia in eodem triangulo rectangulo ACD designat perpendiculum CF amplitudinem, & ADC angulum projectionis, liquet sex illa problemata ad alia totidem purè geometrica, posse revocari. Primum etenim erit, quum datis hypothenusâ AD, & perpendiculo CF, quæritur segmentum AF unà cum angulo ADC. Secundum, quum datis hypothenusâ AD, & segmento AF, quæritur perpendiculum CF unà cum angulo ADC. Tertium, quum datis hypothenusâ AD, & angulo ADC, quæritur perpendiculum CF unà cum segmento AF. Quartum, quum datis perpendiculo CF, & segmento AF, quæritur hypothenusa AD unà cum angulo ADC. Quintum, quum datis perpendiculo CF, & angulo ADC, quæritur hypothenusa AD unà cum segmento AF. Et sextum denique, quum datis segmento

AF,

AF, & angulo ADC, quæritur hypothenusa AD unà cum perpendiculo CF.

Hæc problemata facili negotio resolvet quicumque, vel leviter in trigonometricis, & analyticis versatus est, nec hominis otio abutentis notam effugere possem, si eorum resolutionem hìc vellem afferre. Cæterùm, quum amplitudo projectionis designetur per perpendiculum CF, patet veritas ejus, quod primus omnium prodidit Galilæus: nimirum amplitudinem projectionis maximam esse, quum angulus est semirectus, sive graduum quadragintaquinque, Nam, quum CF sit semper una ex ordinatis semicirculi descripti super AD, tamquam diametro; perspicuum est, CF fieri maximam omnium ordinatarum istius semicirculi, quotiescumque angulus ADC, sive CAL semirectum adæquat.

Sed illud etiam exinde non obscurè colligi potest, eandem futuram esse projectionis amplitudinem, sive angulus fuerit minor quadraginta quinque gradibus, sive major, sed qui unum rectum cum priori constituat; quandoquidem perpendiculum CF ejusdem semper invenietur quantitatis, sive angulus CAL fuerit graduum, exempli gratiâ, triginta, sive graduum sexaginta, qui unà cum iis nonaginta gradus constituunt. Unde datis velocitate, & amplitudine proje-

jectionis, si quæratur angulus cum altitudine, problema duplicem solutionem admittet: quod exinde etiam liquere potest, quia æquatio, quæ invenitur in resolutione problematis, ad duplicem dimensionem ascendit.

Ponatur etenim AD, quæ designat quadruplum altitudinis, unde cadendo data velocitas acquiritur, $= 4a$, amplitudo projectionis AL, sive CF $= b$, & AF, quæ designat quadruplum altitudinis ejusdem projectionis, $= x$. Erit itaque DF $= 4a - x$. Et quoniam, propter triangulum rectangulum ACD, AF est ad CF, ut CF ad DF, erit in terminis analyticis, ut x ad b, ita b ad $4a - x$: unde orietur æquatio $4ax - xx = bb$, hoc est $xx - 4ax + bb = 0$, quæ quum ad duplicem dimensionem ascendat, consequens est, ut altitudo projectionis, & angulus, ei correspondens, duplicem valorem habere possit.

Quod verò duo isti anguli, qui problemati satisfaciunt, simul unum rectum adæquent, ex ipsâ etiam æquatione deducitur. Nam, quum in eâ coefficiens secundi termini sit $4a$, adæquabit summa radicum incognitæ x ipsam AD; adeòque si AF sit radix una, erit DF radix altera. Est autem ADC angulus projectionis, qui correspondet ipsi AF, & CAD angulus, qui correspondet ipsi DF.

si DF. Itaque duo anguli, qui problemati satisfaciant, sunt ADC, CAD, quos simul sumptos perspicuum est unum rectum adæquare.

Jam igitur datâ velocitate, cum qua grave corpus projicitur, non eadem semper parabola est semita projecti, sed alia, atque alia erit, prout alius, atque alius est angulus projectionis, ejusque amplitudo augebitur usque ad gradum quadragesimum quintum, post quem minuetur ordine retrogredo, tametsi altitudo semper augeatur. Quod, si autem quæratur locus, in quo reperiuntur vertices principales omnium istarum parabolarum, invenietur esse ellipsis AEOV, cujus axis minor est recta AO, quæ designat altitudinem, unde cadendo acquiritur velocitas data, axis verò major est recta EV, dupla ipsius AO.

Neque verò difficile id erit ostendere. Nam, si AKL sit una ex iis parabolis; ejus vertex principalis erit punctum K, quod invenitur bisecando amplitudinem AL in puncto I, & erigendo perpendicularem IK. Unde demisso super AO perpendiculo KH, si ponatur AO $= a$, AH $= x$, & KH $= y$; erit AD $= 4a$, AF $= 4x$, DF $= 4a - 4x$, & CF $= 2y$. Est autem, propter triangulum rectangulum ACD, ut AF ad CF, ita CF ad DF, hoc est, in terminis analyticis, ut $4x$ ad

ad $2y$, ita $2y$ ad $4a - 4x$. Quare erit $4yy = 16ax - 16xx$, hoc est $yy = 4ax - 4xx$; quæ quidem æquatio quum resolvatur in hanc analogiam, ut yy ad $ax - xx$, ita 4 ad 1, erit ut KH quadratum ad rectangulum AHO, ita EV quadratū ad AO quadratum; & propterea punctum K erit in ellipsi, quæ describitur axibus conjugatis EV, AO.

Verumtamen, ut meliùs intelligatur, qua ratione omnia puncta istius ellipsis possint esse vertices principales omnium illarum parabolarum; notetur velim, grave corpus non modò projici posse obliquè sursum, verùm etiam obliquè deorsum. Itaque, quum grave corpus projicitur obliquè sursum, tum vertex principalis parabolæ, quæ describitur, erit in semiellipsi AEO. Quotiescumque verò idem grave corpus deorsum projicitur obliquè, tunc locus verticis principalis describendæ parabolæ erit in semiellipsi AVO; quum axis ejus reperiatur ad alteràm partem ipsius AN.

Quemadmodum autem ipsum punctum A est vertex principalis parabolæ, quæ describitur, quotiescumque grave corpus projicitur horizontaliter; ita quoque, si projiciatur verticaliter sursum, erit punctum O describendæ parabolæ vertex, quæ in hoc casu vertitur in lineam rectam. Sed si idem grave corpus verticaliter deorsum fuerit proje-

ctum, tunc vertex principalis semitæ suæ abibit in infinitum, nec ullibi reperietur; quum in hoc casu punctum A, unde incipit projectio, sit, ut ita dicam, ultimus vertex parabolæ, quæ describitur.

Præterea notatu hìc etiam dignum existimamus, quod sicuti ellipsis, quæ describitur axibus conjugatis EV, AO, est locus,
Fig. 113. in quo reperiuntur vertices principales omnium illarum parabolarum; ita circuli circumferentia, quæ describitur centro A, intervalloque AO, sit locus, in quo collocantur foci, sive umbilici earundem parabolarum. Etenim si parabolæ AKL fuerit R focus, sive umbilicus, erit parameter diametri AN æqualis quadruplo ipsius AR. Sed eadem parameter, ex superiùs ostensis, est æqualis etiam quadruplo ipsius AO. Itaque erit AO æqualis AR; adeòque si centro A, intervalloque AO describatur circuli circumferentia, hæc transibit per punctum R.

Sed illud quoque nolim hìc silentio prætерire, quod si per umbilicum R cujuscumque parabolæ ducatur recta AR, quæ producta secet parabolam ipsam in M, locus omnium punctorum M, quæ hac ratione determinantur, sit parabola alia OM, cujus vertex principalis est punctum O, axis recta ON, umbilicus punctum A, atque adeò parameter axis recta æqualis quadruplo ipsius AO.

AO. Nec obſcura eſt hujus rei demonſtratio. Nam, quum R ſit umbilicus parabolæ AKM, demiſſo ſuper AN perpendiculo MHN, erit tam AR = KR + KI, quàm MR = KR + KH; adeòque erit MR — AR = KR + KH — KR — KI, hoc eſt MR — AR = AN. Unde, quum ſit MR = AN + AR, hoc eſt MR = ON, erit AM = ON + AO: id quod indicat punctum M eſſe in parabolâ OM, cujus vertex principalis eſt punctum O, axis recta ON, umbilicus verò punctum A.

Quin etiam, ne aliquid hìc miſſum faciamus, quod ſcitu ſit dignū, notabimus tandem, novam iſtam parabolam OM contingere parabolas omnes ALM in ipſo puncto M, quod eis commune eſt. Id autem non aliâ meliori ratione demonſtrari poterit, quàm oſtendendo, rectam MT, quæ contingit parabolam OM in puncto M, contingere etiam parabolam ALM in eodem puncto M: quod quidem præſtabimus in hunc modum. Quoniam punctum A eſt umbilicus parabolæ OM, & MT tangens ejus; erit AM æqualis AT. Jam verò, propter ſimilitudinem triangulorum MAT, MRS, AM eſt ad AT, ut RM ad RS. Itaque erit etiam RM æqualis RS: & propterea, quum punctum R ſit umbilicus parabolæ ALM, continget eam in puncto M recta MT.

Verum enim verò, ut ad motum proje-

ctorum revertamur, non aliud supereſt, quàm ut problemata quædam reſolvamus, quæ inſtitui ſolent circa projecta, quorum motus non ſiſtitur ad eandem lineam horizontalem, unde ſuum initium habuit. Hæc problemata, ſaltem quæ uſum habent in arte balliſticâ, duo ſunt. Primum, ut dato angulo projectionis CAL inveniatur altitudo AO, unde talis cadendo velocitas acquiratur, ut ſi eâ grave corpus projiciatur, pergat ad datum locum M. Alterum, ut viciſſim datâ altitudine AO, unde cadendo acquiritur velocitas projecto, inveniatur angulus projectionis CAL, ut in deſcenſu ſuo obliquo tranſeat grave per punctum M.

Fig. 112.

Quantum ad primum, ejus ſolutio nullam difficultatem involvit. Nam ſemper ac datus eſt angulus projectionis CAL, datumque punctum M, per quod grave tranſire debet; dabitur parabola, ſive ſemita projecti AKM, quum detur, tam diameter ejus AN cum angulo, quem ordinatæ cum abſciſſis conſtituunt, quàm punctum M, per quod tranſit parabola illa. Jam verò datâ parabolâ; datur etiam parameter diametri AN; quum ductâ MQ ipſi AC parallelâ, inveniatur parameter illa, faciendo, ut AQ ad MQ, ita MQ ad quartam. Quare ſi AO conſtituatur quarta pars hujus parametri, habebitur altitudo quæſita.

Quan-

Quantum ad secundum, ejus solutio est paulò difficilior, sed analyticè resolvemus illud in hunc modum. Ponatur altitudo data $AO = a$, recta MN, quæ est distantia puncti dati M à verticali $AN, = b$, $AN = c$, & AQ, quæ determinat positionem rectæ MQ, sive $AC, = x$. Erit itaque $NQ = x - c$ (sive etiam $c - x$), & quadratum ex $MQ = xx - 2cx + cc + bb$. Est autem propter parabolam MQ quadratum æquale rectangulo, quod fit ex AQ in quadruplum ipsius AO. Quare erit in terminis analyticis $xx - 2cx + cc + bb = 4ax$, hoc est $xx - 2cx - 4ax + cc + bb = 0$, ex cujus æquationis resolutione orientur pro incognitâ x duo valores, quorum alter erit $c + 2a + \sqrt{4aa + 4ac - bb}$, alter $c + 2a - \sqrt{4aa + 4ac - bb}$.

Sed notetur hoc loco velim, quod si fuerit $bb = 4ac$, hoc est MN quadratum æquale rectangulo quater contento sub AO, & AN; tunc æquatio futura erit $xx - 2cx - 4ax + cc + 4ac = 0$, & radices duæ incognitæ x, erunt $c + 2a + \sqrt{4aa}$, & $c + 2a - \sqrt{4aa}$, hoc est $c + 4a$, & c. Quod si verò punctum M, fuerit in horizontali AL, tunc quia recta AN sit æqualis zero, sive nihilo, delendi sunt in inventâ æquatione termini omnes, in quibus c reperitur. Quare habebitur $xx - 4ax + bb = 0$, atque adeò duo valores incognitæ

 x,

x, erunt $2a + \sqrt{4aa - bb}$, & $2a - \sqrt{4aa - bb}$.

Cæterùm generalis conſtructio pro omni caſu hæc eſt. Ducatur per datum punctum M recta verticalis MP, & æqualis duplo ipſius AO; tum centro P, & intervallo mediæ proportionalis inter ON, & quadruplum ejuſdem AO, deſcribatur circuli circumferentia, quæ quidem, ſecando rectam AN, determinabit poſitionem ipſius MQ, ſive AC.

Jam ſi iſtius ſectionis duo ſint puncta: (id, quod accidit, quum media illa proportionalis eſt major, quàm MN;) problema duobus modis ſolvi poterit. Quod ſi autem deſcripta circuli circumferentia tangat rectam AN in unico puncto: (id, quod contingit, quum eadem illa media proportionalis eſt æqualis ipſi MN;) problema unicam tantùm ſolutionem admittet. Et denique ſi ſectio nullibi reperiatur: (quod quidem contingit, quum media proportionalis prædicta minor eſt, quàm MN;) tunc problema ſolutu impoſſibile erit.

CAP. II.

De motu projectorum in quacumque gravitatis hypotheſi.

Quæ de motu projectorum ſuperiori capite oſtenſa ſunt, locum ſibi vindicant

cant in hypothesi, quòd vis gravitatis eâdem, & constanti ratione agat in corpora gravia, quòdque tendat ad punctum indefinitè distans, ita ut gravium directiones possint tamquam parallelæ considerari. Nunc eadem de motu projectorum disputatio ad suam universalitatem est deducenda, deque eo agendum in quacumque gravitatis hypothesi, tendentis ad punctum, cujus distantia à corpore gravi sit finita. Et primò quidem ostendendum est nobis elegans illud theorema, quod primus omnium protulit Acutissimus Newtonus in Principiis suæ Philosophiæ Mathematicis: nimirum areas, quas projecta describunt circa centrum virium, radiis ad idem ductis, consistere in planis immobilibus, & esse temporibus proportionales.

Sit itaque S centrum virium, & projiciatur grave corpus secundùm rectam AC. Dividatur tempus in partes æquales, & primâ temporis parte describat grave motu projectili rectam AB. Idem igitur secundâ temporis parte, si nihil impediret, per notas naturæ leges rectà pergeret ad C, describeretque rectam BC æqualem ipsi AB: adeò, ut radiis ad centrum actis AS, BS, CS confectæ forent æquales areæ ASB, BSC. Verùm ubi corpus venit ad B, agat vis gravitatis, faciatque, ut corpus de rectâ BC declinet, FIG. 114.

 & per-

& pergat in ipsâ BD; jamque ductâ CD ipsi BS parallelâ, per notissimam virium compositionem, completâ secundâ temporis parte, reperietur corpus in D, in eodem plano cum triangulo ASB, describetque adeò parte illâ temporis triangulum BSD, quod velut æquale triangulo BSC, quum sint in eâdem basi BS, & in iisdem parallelis BS, CD, erit etiam æquale triangulo ASB.

Simili argumento, si vis gravitatis successivè agat in D, F, H, &c. faciens, ut grave corpus singulis temporis particulis declinando à rectis DE, FG, HI describat rectas DF, FH, HK; jacebunt istæ omnes in eodem plano, & triangulum BSD ipsi DSF, & DSF ipsi FSH, & FSH ipsi HSK æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto describuntur; & componendo erunt arearum summæ quævis, ut tempora descriptionum. Augeatur jam numerus, & minuatur latitudo triangulorum in infinitum: id, quod fit, quum vis centripeta gravitatis agit indesinenter; & eorum ultima perimeter ABDFHK erit linea curva, eruntque adhuc areæ quævis ASD, ASF temporibus proportionales, & in plano immoto consistent.

Ex hoc autem theoremate illud colligi potest, quod velocitas projecti in quolibet suæ orbitæ loco, sit reciprocè, ut perpendicu-

culum, demissum à centro virium in rectam, quæ orbitam in loco illo contingit. Sunt enim velocitates in locis A, B, D, F, H, ut sunt bases æqualium triangulorum AB, BD, DF, FH, HK, quæ æqualibus temporibus describuntur. Jam verò bases istæ, propter æqualia triangula, sunt reciprocè, ut perpendicula, quæ à centro virium S in ipsas demittuntur. Itaque eædem velocitates erunt inter se reciprocè, ut perpendicula ista.

Atque hinc datis velocitatibus, quas corpus habet in tribus quibuscumque orbitæ locis, facile erit, centrum virium invenire. Sit enim PQR orbita projecti, quam tangant in punctis P, Q, R rectæ PT, TV, VR. Ad tangentes istas erigantur perpendicula PA, QB, RC velocitatibus corporis in punctis P, Q, R reciprocè proportionalia, & ductis per terminos eorum A, B, C rectis AD, DE, EC tangentibus PT, TV, VR respectivè parallelis, dabit concursus rectarum TD, VE centrum virium quæsitum. Fig. 115.

Sit enim S centrum virium, & demittantur tangentibus PT, TV tum perpendicula SM, SN ex centro S, tum perpendicula DF, DG ex puncto D. Itaque velocitas in P ad velocitatem in Q erit ex ostensis, ut SN ad SM. Sed ex constructione velocitas in P est ad velocitatem in Q, ut QB ad PA, hoc est,

eſt, ut DG ad DF. Quare erit ex æquali, ut SN ad SM, ita DG ad DF; atque adeò permutando, ut SN ad DG, ita SM ad DF.

Et quoniam completis parallelogrammis SHTK, DITL, SN eſt ad DG, ut SK ad DL; itemq; SM eſt ad DF, ut SH ad DI: erit proinde ex æquali SK ad DL, ita SH ad DI. Sunt igitur parallelogramma SHTK, DITL ſimilia, & ſimiliter poſita. Quare puncta S, D, T erunt in eâdem rectâ lineâ. Simili argumento oſtendemus, puncta S, E, V eſſe in unâ rectâ. Et igitur centrum virium S reperietur in concurſu rectarum TD, VE.

Elegantis illius theorematis obtinet etiam converſum: nimirum, quod ſi projectum vi ſuâ gravitatis ſubinde moveatur circa punctum aliquod, ut radiis ad illud actis areas deſcribat in plano immoto, & temporibus proportionales, vis ipſa gravitatis tendat ad

FIG. 114. punctum illud tamquam centrum. Deſcribat enim grave corpus, projectum ſecundùm rectam AC, vi ſuâ gravitatis æqualibus temporibus æquales areas ASB, BSD, DSF, FSH circa punctum S, quæ conſiſtat etiam in uno, eodemque plano. Dico S eſſe punctum, ad quod tamquam centrum dirigitur vis gravitatis.

Nam grave corpus, deſcriptâ primâ temporis particulâ rectâ AB, ſi nulla foret vis gravitatis, particulâ ſecundâ temporis rectâ

ctà pergeret ad C, describeretque rectam BC æqualem ipsi AB. Jam verò per vim gravitatis completâ secundâ temporis particulâ reperitur in D. Itaque in puncto B vis gravitatis suam exercet actionem secundùm rectam ipsi CD parallelam. Est autem BS recta ista parallela; quum propter æqualia triangula ASB, BSC, æqualia sint etiam triangula BSC, BSD, quæ quum habeant eandem basim BS, debent esse quoque in iisdem patallelis. Quare vis gravitatis agit in puncto B secundùm rectam BS. Eodem argumento ostendetur, vim gravitatis in punctis D, F, H agere secundùm rectas DS, FS, HS. Unde, quum rectæ istæ omnes conveniant in S, erit S puuctum, ad quod dirigitur vis gravitatis.

Hinc pro indagando centro virium non aliud criterium certius haberi potest, quàm æquabilis arearum descriptio. Unde, quum in confesso sit apud Astronomos omnes post Keplerum planetas primarios subinde circa solem motus suos attemperare, ut radiis ad illum ductis areas percurrant temporibus proportionales; dicendum est, vim illam, quæcumque ea sit, qua planetæ primarii perpetuò detorquentur à tangentibus rectilineis, & in orbitis curvilineis revolvi coguntur, ad solem tamquam centrum dirigi. Et par est ratio de planetis secundariis re-

respectu horum primariorum ; quum novissimis observationibus constet, eos quoque circa suos primarios areas percurrere continuò temporibus proportionales.

Verum hic monitum Lectorem velim, quòd si corpus unum percurrat areas temporibus proportionales circa corpus alterum, quod utcumque movetur; tunc, ut isto quiescente pergat areas temporibus proportionales percurrere, necesse sit, ut urgeatur vi compositâ ex vi propriâ, tendente ad corpus illud alterum, & ex vi, qua corpus illud alterum urgetur, tendente ad plagam contrariam. Et ratio est, quia si duo, aut plura corpora quomodocumque moveantur inter se, eademque novis viribus concitentur, non aliâ ratione fieri potest, ut pergant ea omnia eodem modo moveri inter se, ac si viribus illis novis non essent concitata, quàm si novæ illæ vires æqualiter accelerent corpora, eaque urgeant secundùm lineas parallelas.

Quantum ad orbitam, quam in qualibet gravitatis hypothesi describere debet grave corpus de loco dato, secundùm datam rectam, & cùm datâ velocitate projectum; ea non aliter determinari potest, quàm concessis figurarum curvilinearum quadraturis: adeò, ut problema istud generaliter conceptum tamquam trascendens haberi debeat,

beat, fitque algebraicum in certis tantùm virium hypothesibus. Interim pro nobilissimi hujus problematis resolutione, præter id, quod primo loco posuimus, ostendendum est nobis hoc aliud theorema, Newtono similiter ferendum acceptum: scilicet, quòd si corpus projiciatur de loco dato secundùm rectam aliquam lineam, & cogente vi quacumque gravitatis describat curvam aliquam, interea ac corpus alterum eâdem vi concitatum rectâ ascendat, vel descendat, fintque eorum velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales, quòd inquam in omnibus æqualibus altitudinibus eorum velocitates æquentur inter se.

Sit itaque centrum virium C, & corpus aliquod projectum ex loco V secundùm aliquam rectam lineam, describat cogente vi suâ gravitatis, quam utcumque variabilem assumimus, lineam curvam VIK. Descendat autem corpus alterum ab A per D ad ipsum centrum virium C, cujus eadem sit lex gravitatis. Centro C, intervallis quibusvis describantur circuli concentrici DI, EK, secantes rectam AC in punctis D, & E, curvam verò VIK in punctis I, & K. Dico, quòd si corpora illa habeant in locis D, & I æqualiter distantibus à centro virium C æquales velocitates, etiam in locis E, K, æqualiter quoque distantibus ab eodem centro C, æqua- FIG. 116.

les

les velocitates habebunt.

Sit enim intervallum circulorum concentricorum DE indefinitè parvum, & ductâ CI occurrente ipsi EK in N, demittatur in IK perpendiculum NT. Quia igitur æquales sunt distantiæ CD, CI; erunt etiam æquales vires, quibus corpora in locis D, & I urgentur versus centrum C. Exponantur hæ vires per æquales lineolas DE, IN; jamque si vis una IN resolvatur in duas alias IT, NT, liquidò patebit, solam vim IT corpus in curvâ motum accelerare, quum altera NT agendo secundùm lineam corporis cursui perpendicularem, nil mutet velocitatem corporis in cursu illo, sed tantùm retrahat corpus à cursu rectilineo, faciendo ipsum de orbis tangente perpetuò deflectere, inque viâ curvilineâ VIK progredi. Quare vires corporum acceleratrices in locis D, & I erunt inter se, ut est DE, sive IN ad IT.

Et quoniam velocitates, quæ à duabus quibusvis viribus generantur, sunt ut vires, & tempora conjunctim; erunt velocitates genitæ per spatia DE, IK in ratione compositâ ex viribus, quæ corpora accelerant in locis D, & I, & ex temporibus, quibus ipsa spatia DE, IK describuntur. Ostensum est autem, vires corporum acceleratrices in locis D, & I esse in ratione rectarum DE, IT, & tempora, quibus describuntur spatia DE,

IK,

IK, ob æqualitatem velocitatum, sunt ut ipsa spatia descripta DE, IK. Itaque velocitates genitæ in cursu corporum per lineas DE, IK erunt in ratione compositâ ex DE, ad IT, & ex DE ad IK, hoc est, componendo has rationes, erunt inter se, ut DE, sive IN quadratum ad rectangulum TIK; adeòque quum, ob triangulum rectangulum INK, quadratum ex IN æquale sit rectangulo TIK, æquales erunt velocitates, quæ generantur in transitu corporum per lineas DE, IK.

Hinc quemadmodum æquales sunt corporum velocitates in locis D, & I, ita etiam æquales erunt velocitates in locis E, & K; eâdemque ratione semper reperientur æquales in locis singulis, quæ sint æqualiter distantia à centro virium C. Eodem autem argumento ostendetur, corpora æquivelocia, & æqualiter à centro distantia, quum ascendunt, æqualiter ad æquales distantias retardari; quandoquidem vis gravitatis, quæcumque sit lex ejus, perinde retardat corpora in ascensu, ac ea accelerat in descensu.

Sit jam CA maxima à centro distantia, ad quam corpus in curvâ motum ascendere possit, si de quovis suæ orbitæ loco eâ, quam ibi habet, velocitate sursum projiciatur; erit itaque A locus, de quo corpus aliud cadere debet, ut in loco D velocitatem acqui-

rat

rat æqualem velocitati corporis prioris in I. Unde si CABFG sit scala virium, hoc est figura, quæ ordinatis suis DF, EG repræsentet vires gravitatis in locis D, & E, aut etiam I, & K; per ea, quæ superiùs ostensa sunt, velocitas corporis in quolibet suæ orbitæ loco I erit in subduplicatâ ratione areæ correspondentis in scalâ virium DABF; atque adeò dabitur, quum data sit distantia CA.

His positis, pergamus modò ad solutionem problematis de determinandâ semitâ projecti in quacumque gravitatis hypothesi. Tendat itaque vis quælibet gravitatis ad centrum C, & invenienda sint puncta lineæ curvæ VIK, quam grave corpus projectum ex loco V secundùm rectam VR describit, cogente vi illâ gravitatis. Sit punctum A locus, de quo corpus aliud cadere debet, ut in loco V velocitatem acquirat, æqualem ei, cum qua projicitur corpus primum. Habebunt igitur duo ista corpora, per ostensum theorema, in omnibus locis æquidistantibus à centro virium C æquales velocitates, & propterea si CABFG sit scala virium, velocitas, quàm corpus in curvâ motum habet in loco quolibet I, erit in subduplicatâ ratione areæ correspondentis DABF, hoc est, ut quantitas X, si vocetur XX area ipsa DABF.

Jam lineola IK, dato tempore quam minimo

nimo descripta, est ut velocitas, qua describitur, directè. Itaque erit IK, ut quantitas X. Et quoniam dato tempore, quo describitur IK, datur etiam triangulum ei proportionale CIK; proinde erit KN, ut data aliqua quantitas Q directè, & distantia CI, sive CD inversè; hoc est, ut sola quantitas Z, si vocemus Z quotientem, qui oritur, dividendo Q per CD. Unde, si ponamus quantitatem datam Q talem esse, ut sit in aliquo casu, ut IK ad KN ita X ad Z; erit in omni casu, hoc est ubicumque capiatur lineola IK, quæ dato tempore describitur, ut IK ad KN, ita X ad Z.

Quia igitur IK est ad KN, ut X ad Z; erit etiã, ut IK quadratum ad KN quadratum, ita XX ad ZZ; & consequenter erit dividendo ut IN, sive DE quadratum ad KN quadratum, ita XX — ZZ ad ZZ. Unde, si ponamus XX — ZZ = VV, erit ut DE ad KN, ita V ad Z; atque adeò, ut DE ad KN, ita rectangulum ex CD in V ad rectangulum ex CD in Z.

Hinc siquidem ex puncto D erigatur perpendicularis D*b*, ita ut rectangulum ex CD in Z æquale sit rectangulo ex D*b* in V, idque fiat ubique, & sit *abz* linea curva, quam perpetuò tangit punctum *b*; erit ut DE ad KN, ita rectangulum ex CD in V ad rectangulum ex D*b* in V, hoc est ut DE ad KN,

 ita

ita CD ad D*b*. Unde erit rectangulum ex DE in D*b* æquale rectangulo ex CD, sive CI in KN, hoc est areola DE*zb* æqualis duplo exigui trianguli CKI; atque adeò componendo erit area tota VD*ba* æqualis duplo areæ totius VIC.

Porrò centro C intervallo, si placet, CV describatur circulus VXY, quem secent in X, & Y rectæ CI, CK. Itaque, propter sectores similes CKN, CYX, erit ut CD quadratum ad CV quadratum, ita rectangulum ex CI in KN ad rectangulum ex CX in XY. Ostensum est autem, rectangulũ ex CI in KN æquale esse rectangulo ex DE in D*b*. Quare erit quoque, ut CD quadratum ad CV quadratum, ita rectangulum ex DE in D*b* ad rectangulum ex CX in XY.

Hinc siquidem D*b* extendatur usque in *c*, ita ut D*b* sit ad D*c*, ut est CD quadratum ad CV quadratum, idque fiat ubique, & sit *dcx* curva linea, quam perpetuò tangit punctum *c*; erit ex æquali ut D*b* ad D*c*, ita rectangulum ex DE in D*b* ad rectangulum ex CX in XY. Est autem D*b* ad D*c*, ut rectangulum ex DE in D*b* ad rectangulum ex DE in D*c*. Quare erit rectangulum ex CX in XY æquale rectangulo ex DE in D*c*, hoc est duplum exigui sectoris CYX æquale areolæ DE*xc*; atque adeò erit componendo duplum totius sectoris VCX æquale toti areæ VD*cd*. Est

Est igitur area VD*ba* æqualis duplo ipsius VIC, quæ exprimit tempus per arcum VI, & area VD*cd* æqualis duplo sectoris VCX, qui determinat angulum VCI. Unde dato tempore quovis, ex quo corpus discessit de loco V, dabitur area ipsi proportionalis VD*ba*, & inde dabitur distantia corporis à centro CD, sive CI. Datâ autem CD, datur quoque area VD*cd*, eique proportionalis sector VCX unà cum angulo VCI. Quare dabitur etiam locus I, in quo corpus completo illo tempore reperietur; quum ex datis angulo VCX, & distantiâ CI facile sit locum illum invenire.

Hæc solutio est ipsissima illa, quam primus omnium exhibuit Acutissimus Newtonus in Principiis Philosophiæ Mathematicis, sed ni fallor, prout à Nobis allata est, Tyronum captui magis accomodata; nec aliud discriminis occurrit, quàm quod in solutione Newtonianâ areæ VD*ba*, VD*cd* non duplæ, sed æquales prodeunt areis correspondentibus VCI, VCX: id, quod in problematis solutione nullam efficit mutationem. Sed iisdem Newtoni vestigiis insistendo, excogitari potest solutio alia, quæ puncta curvæ determinat absque ullâ temporis consideratione, quamque mihi olim communicavit Egregius Mathematicus Jacobus Grazini, qui in nostro Lyceo magnâ

Auditorum multitudine Historiam Ecclesiasticam profitetur.

Nimirum, iisdem ut supra manentibus, erigatur ex puncto D ordinata rectangula D*b*, quæ sit ad rectam aliquam datam, puta CV, ut est Z ad V, idq; fiat ubique, & sit *abz* linea curva, quam perpetuò tangit punctum *b*. Itaque, quia D*b* est ad CV, ut Z ad V, & ex superiùs ostensis Z est ad V, ut KN ad DE; erit ex æquali, ut D*b* ad CV, ita KN ad DE, eritque adeo rectangulum ex D*b* in DE, hoc est areola DE*zb* æqualis rectangulo ex CV in KN. Hæc autem æqualitas ubique reperitur. Quare erit componēdo area tota AD*ba* æqualis rectangulo ex CV in DI: proindeque invenietur curvæ punctum I, correspondens puncto D, si centro C, & intervallo CD describatur arcus DI talis magnitudinis, ut sit æqualis ei, quod oritur, applicando aream correspondentem AD*ba* ad rectam magnitudinem datam CV.

In utrâque verò solutione illud requiritur, ut quantitas litterâ Q designata talis sit, ut si ea dividatur per distantiam CD, sive CI, & dicatur Z quotiens hujus divisionis, sit semper, ut IK ad KN, ita X, sive latus quadratum areæ DABF, ad Z. Quæ autem sit quantitas ista, quæ hunc præstat effectum, haud difficile erit determinare. Nimirum, quum in omni loco debeat esse,

ut

ut IK ad KN, ita X ad Z, obtinebit etiam hæc proportio, quum punctum I accedit ad V. Jam verò recta VR, secundùm quam projicitur corpus, contingit curvam VIK in puncto V; adeòque demisso super eâ perpendiculo CR, fit in puncto V, ut IK ad KN, ita CV ad CR. Quare erit ex æquali, ut CV ad CR, ita X ad Z.

Jam in puncto V quantitas X designat latus quadratum areæ AVHB, & quantitas Z quotienem, qui oritur, dividendo Q per CV. Igitur erit, ut latus quadratum areæ AVHB ad quotientem istum, ita CV ad CR; & propterea quantitas Q æqualis erit rectangulo, quod fit ex CR in latus quadratum areæ AVHB. Ex quo jam tollitur difficultas, quæ alicui subnasci poterat, nempe quod in utrâque problematis solutione nulla ratio habita sit positionis rectæ VR, secundùm quam projicitur grave corpus; quandoquidem hujusmodi problematis conditio latebat in quantitate, designatâ per litteram Q, utpote quæ alia, atque alia oritur, prout alia, atque alia est positio rectæ VR.

Determinatâ curvâ VIK, si ducenda sit tangens ad aliquod ejus punctum I, id factu facile erit: scilicet, si ad rectam CI, atque ad datum in eâ punctum I constituatur angulus, cujus sinus sit ad radium, si-

ve ſinum totum, ut eſt Z ad X, hoc eſt in ratione compoſitâ ex ſubduplicatâ arearum AVHB, ADFB, & ex ſimplici rectarum CR, CD. Nam angulus, quem recta CI conſtituit cum tangente, eſt CIK; & ſinus anguli CIK eſt ad radium, ſive ſinum totum, ut eſt KN ad IK, ſive etiam, ut Z ad X.

Cæterùm hoc problema de determinandâ ſemitâ projecti in quacumque gravitatis hypotheſi per conceſſas curvarum quadraturas, ut dictum eſt, ſolutum primò fuit à Viro ſummo Iſaaco Newtono. Ejuſdem problematis ſolutionem aggreſſus eſt etiam deinde Geometra Celeberrimus Johannes Bernoullius, qui eam erudito orbi impertivit occaſione ſolutionis cujuſdam ſpecialis, quam exhibuit ſolertiſſimus Hermannus in hypotheſi, quod vis gravitatis ſit reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ à centro virium, ut apparet ex Monumentis Regiæ Scientiarum Academiæ Pariſienſis anni 1710. Verum, notante Johanne Keillio in diſſertatione ſuâ de viribus centralibus, ſolutio Bernoulliana nonniſi in notatione quantitatum differt à Newtonianâ, nec proinde magis ab iſtâ diſcrepat, quàm verba latinis litteris expreſſa differunt ab iiſdem verbis ſcriptis in græcis characteribus.

Etenim, ſi cum Johanne Bernoullio ponamus rectam magnitudine datam $CV = a$, ar-

arcum VX $= z$, & distantiam CD sive CI $= x$, erit XY $= dz$, & DE, sive IN $= dx$; atq; adeò quia, propter sectores similes CYX, CKN, CV est ad CD, ut XY ad KN, erit

$$KN = \frac{xdz}{d}, \;\&\; IK = \frac{\sqrt{a^2dx^2 + x^2dz^2}}{d};$$

adeòque IK erit ad KN, ut $\sqrt{a^2dx^2 + x^2dz^2}$ ad xdz. Unde, si ponamus ulterius aream totam ACOB $= ab$; vim gravitatis in puncto D, hoc est ordinatam DF $= g$, & rectangulum ex CR in latus quadratum areæ AVHB $= ac$; quia areola DEGF fit gdx, erit area CDFO $= \int gdx$, hoc est æqualis summæ omnium gdx, & area ADFB $= ab - \int gdx$. Est autem IK ad KN, ut X ad Z, hoc est in ratione compositâ ex subduplicatâ arearum ADFB, AVHB, & ex simplici rectarum CD, CR. Quare erit, elevando terminos omnes proportionis ad quadratum, ut $a^2dx^2 + x^2dz^2$ ad x^2dz^2, ita $abxx - xx\int gdx$ ad a^2c^2; hoc est dividendo, ut a^2dx^2 ad x^2dz^2, ita $abxx - xx\int gdx - a^2c^2$ ad a^2c^2, & consequenter erit, ut adx ad xdz, ita $\sqrt{abxx - xx\int gdx - a^2c^2}$ ad ac. Unde eruitur ipsissima æquatio, quam pro solutione problematis loco superius citato protulit Johannes Bernoullius, nisi quod hic dicatur g, quod ipse vocavit ϕ.

Itaque in quacumque gravitatis hypothesi, si C sit centrum virium, VR linea projectonis, AV altitudo, unde cadendo acquiritur velocitas, cum qua grave projicitur, CR perpendicularis ad VR, & CABO scala virium; curvæ VIK, quam projectum motu suo describit, hoc erit accidens præcipuum, ut descriptis ex centro C arcubus DI, EK secantibus curvam in duobus punctis I, & K indefinitè proximis, sit semper IK ad KN in ratione compositâ ex subduplicatâ arearum ADFB, AVHB, & ex simplici rectarum CD, CR. Verum notetur hoc loco velim, quod quum centrum virium C abit in infinitum, atque adeò arcus DI, EK evadunt rectæ lineæ perpendilares ad CV; tunc ejusdem curvæ natura hæc erit, ut IK sit ad KN in ratione comsitâ ex subduplicatâ arearũ ADFB, AVHB, & ex eâ, quam habet radius, sive sinus totus ad sinum anguli DVR. Nam, quum punctum C abit in infinitum, nihil obstat, quominus pro CD capiatur CV, quum differant inter se quantitate DV, quæ respectu ipsarum est indefinitè parva; & rectæ CV, CR tametsi evadant infinitæ, earum tamen ratio non sit æqualitatis, sed est eadem cum illâ, quam habet radius, sive sinus totus ad sinum anguli DVR.

Quocirca in hoc casu curvæ differentialis æqua-

æquatio erit longe ſimplicior. Etenim, ſi vocemus abſciſſam VD, x, & ordinatam DI, y; erit DE, ſive IN $= dx$, KN $= dy$, & IK $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Unde, ſi porrò ponamus aream AVHB $= aa$, vim gravitatis in puncto D, hoc eſt ordinatam DF $= g$, quia areola DEGF ſit gdx, erit area tota ADFB $= aa + \int gdx$. Atque adeò, ſi ſtatuamus ulterius rationem, quam habet radius, ſive ſinus totus ad ſinum anguli DVR, eſſe, ut a ad c; quia IK eſt ad KN in ratione compoſitâ ex ſubduplicata arearum ADFB, AVHB, & ex eâ, quam habet radius ſive ſinus totus ad ſinum anguli DVR; erit, elevando terminos omnes ad quadratum, ut $dx^2 + dy^2$ ad dy^2, ita $a^2 + \int gdx$ ad c^2; hoc eſt dividendo, ut dx^2 ad dy^2, ita $a^2 - c^2 + \int gdx$ ad c^2; ſive etiam ponendo $a^2 - c^2 = b^2$, & extrahendo radices quadratas ex terminis proportionis, ut dx ad dy, ita $\sqrt{b^2 + \int gdx}$ ad c: proindeque curvæ differentialis æquatio erit $cdx = dy\sqrt{b^2 + \int gdx}$, quæ etiam mutabitur in hanc aliam $adx = dy\sqrt{\int gdx}$, quum angulus DVR rectus ſupponitur.

Hinc modò, ſi manente angulo DVR recto, ponamus $g = a$, hoc eſt vim gravitatis conſtantem eſſe, ac uniformem, linea terminans ſcalam virium BFO fiet recta ipſi

AD

AD parallela, eritque tam AV, quàm AB, sive DF $= a$. Unde, quum in hoc casu sit $gdx = adx$, erit $\int gdx = ax$; atque adeò curvæ differentialis æquatio erit $adx = dy\sqrt{ax}$. Quumque ista, secundùm regulas artis integrata, det $2\sqrt{ax} = y$, hoc est $4ax = yy$; liquet curvam VIK, quam describit projectum in constanti gravitatis hypothesi, quum projicitur secundùm rectam lineam horizontalem, esse parabolam, cujus vertex principalis est punctum V, axis recta VD, & parameter axis recta alia quadrupla ipsius AV, quæ designat altitudinem, unde cadendo acquiritur velocitas, cum qua projicitur grave corpus: omninò ut in antecedenti capite ostensum est.

Quod si autem in eâdem hypothesi, quod sit $g = a$, angulus DVR non fuerit rectus; tunc curvæ differentialis æquatio erit $cdx = dy\sqrt{b^2 + ax}$, quæ etsi integrata secundùm quantitates, quæ in eâ continetur, det $2c\sqrt{b^2 + ax} = ay$, quia tamen positâ $x = 0$, y non evanescit, sed remanet $ay = 2bc$; erit verum ejus integrale, secundùm regulas notas, $2c\sqrt{b^2 + ax} = ay + 2bc$, atque adeò curvæ æquatio erit $4b^2c^2 + 4ac^2x = a^2y^2 + 4abcy + 4b^2c^2$, hoc est $4ac^2x = a^2y^2 + 4abcy$. Quumque positis $ay = cz$, & $cx = ct + by$, eadem fiat $4ac^2t + 4acby = c^2z^2 + 4abcy$

$+ 4abcy$, hoc eſt $4at = zz$; liquet curvam VIK eſſe etiam parabolam, ſed cujus diameter eſt recta VD, parameter hujus diametri recta alia quadrupla ipſius AV, & ordinatæ ad hanc diametrum rectæ omnes, quæ ipſi VR ſunt parallelæ: ſimiliter ut in antecedenti capite oſtenſum eſt.

CAP. III.

De Inventione virium, quibus corpora moveri poſſint in curvis datis.

Circa motum projectorum duo potiſſimùm problemata inſtitui poſſunt. Primum, ut datâ lege gravitatis inveniatur curva, quam deſcribit projectum motu ſuo. Alterum, ut datâ viciſſim lineâ curvâ, inveniatur lex gravitatis, quæ requiritur ad eam deſcribendam. Duo iſta problemata valde inter ſe mutuò differunt. Illud enim generaliter conceptum eſt naturæ traſcendentis, nec niſi conceſſis curvarum quadraturis conſtrui poteſt, ut jam ſuperiori capite demonſtravimus. Hoc verò per contrarium eſt ſemper algebraicum, nec unquam ad quadraturas recurrere opus eſt, ut id, quod quæritur, determinetur, quemadmodum ex dicendis in hoc capite abundè patebit.

Ita-

Itaque in hoc loco ostendendum nobis est, qua ratione determinandæ sint vires gravitatis, quæ requiruntur, ad hoc ut projecta moveri possunt in curvis datis. Hunc in finem plura à Recentioribus Geometris excogitata sunt theoremata, sive, ut ipsi loqui amant, formulæ generales, præsertim à Varignonio in Monumentis Regiæ Scientiarum Academiæ Parisiensis. Verùm, ut liberè dicam, quid sentiam, non alia pro hac re faciliora, & Tyronibus magis accomodata theoremata invenio, quàm quæ primò mihi sese obtulerunt, quum subtilissimis hisce speculationibus cæpi operã dare. nimirum illa., quæ leguntur in Principiis Philosophiæ Mathematicis Domini Newtoni, qui etsi primus hanc de vi centripetâ doctrinam geometricè pertractaverit, eam tamen ad tantam perduxit perfectionem, ut à subsequentibus Geometris parum admodum ei additum sit.

Consequuntur autem hæc perillustris Newtoni theoremata ex iis, quæ jam à nobis superiùs ostensa sunt. Nimirum primò, quod spatia, quæ ipso motus initio viribus quibusvis describuntur, sint ut vires, & quadrata temporum conjunctim; adeòque vires ipsæ sint, ut spatia descripta ipso motus initio directè, & quadrata temporum inversè. Et secundò, quod projecta circa centrum

trum virium, in quacumque gravitatis hypothesi, subinde motum suum attemperent, ut radiis ad illud actis areas describant continuò temporibus proportionales. Ex his etenim sequitur, quod si APQ sit curva data, & S centrum virium, capiaturque in curvæ perimetro portio indefinitè parva PQ, quam contingat in P recta PV, actoque radio PS, ducantur ex puncto Q duæ rectæ QR, QT, prior quidem ipsi PS parallela, altera eidem perpendicularis; quod inquam vis gravitatis in puncto P, sit ut QR directè, QT quadratum inversè, & PS quadratum etiam inversè; quandoquidem spatium, quod describitur vi gravitatis, dum grave corpus fertur per PQ, est translatio corporis de tangente in orbem, hoc est recta QR, & tempus per PQ, ut dictum est, designatur per aream PSQ, sive etiam per rectangulum ex PS in QT, quod areæ illius est duplum. Fig. 117.

Sed demisso ex centro virium S ad tangentem PR perpendiculo SY, eadem vis gravitatis in puncto P erit quoque, ut QR directè, PQ quadratū inversè, & SY quadratum etiam inversè. Est enim areæ PSQ duplum, non modò rectangulum, quod fit ex PS in QT, verùm etiam rectangulum, quod fit ex PQ in SY. Quocirca eadem illa quantitas, quæ est, ut QR directè, QT qua-

dra-

dratum inversè, & PS quadratum etiam inversè, erit quoque, ut QR directè, PQ quadratum inversè, & SY quadratum etiam inversè.

Verùm notetur hoc loco velim, quod etsi in utrâque harum formularum, quas protulit Dominus Newtonus pro determinandâ lege gravitatis, unà cum quantitatibus finitis, existant etiam quantitates aliæ indefinitè parvæ; attamen tota quantitas, cui proportione correspondet ipsa vis gravitatis, sit semper finita. Estque hujus rei ratio, quia existente PQ, vel QT infinitesimâ primi generis, sit QR infinitesima generis secundi.

Id clariùs apparebit ex tertiâ formulâ, quam idem Newtonus detexit pro determinandâ lege gravitatis, utpote quæ ex solis quantitatibus finitis constat, nec ullæ occurrunt in eâ quantitates indefinitè parvæ. Nam si PSV sit chorda circuli osculantis curvam datam APQ in puncto P, atque adeò habentis eandem curvaturam cum arcu PQ, notat Vir Clarissimus eandem vim gravitatis in loco P esse reciprocè, ut solidum, quod fit ex PV in SY quadratum.

Hujus formulæ non aliam affert demonstrationem, quàm quia hac ratione quotiens, qui oritur, dividendo PQ quadratum per QR, fit æqualis ipsi PV. Id autem ut Tyro-

ronibus noſtris innoteſcat, ſit PX diameter circuli oſcillantis curvam APQ in puncto P, & ducatur per punctum Q recta Qxu ipſi PR parallela, quæ ſecet PV in x, & PX in u. Itaque, quia PV eſt chorda hujus circuli, erit angulus PVX rectus, adeòque æqualis angulo XPR, ſive Xux. Unde, quum ſimilia ſint triangula Pux, PVX, erit ut Pu ad Px, ita PV ad PX; adeòque rectangulum ex Pu in PX æquale erit rectangulo ex PV in Px, ſive QR.

Et quoniam arcus PQ non differt ſenſibiliter à ſuâ chordâ, erit propter circulum rectangulum ex PX in Pu æquale quadrato, quod fit ex PQ. Oſtenſum eſt autem, rectangulum ex PX in Pu æquale eſſe rectangulo ex PV in QR. Itaque rectangulum ex PV in QR æquale erit PQ quadrato; adeòque quotiens, qui oritur, dividendo PQ quadratum per QR, æqualis erit ipſi PV. Unde vis gravitatis in puncto P, quæ eſt, ut QR directè, PQ quadratum inversè, & SY quadratum etiam inversè, erit quoque reciprocè ut ſolidum, quod fit ex PV in SY quadratum.

Ex tertiâ iſtâ formulâ Newtonianâ ultrò ſequitur theorema, quod Johannes Bernoullius olim communicavit Egregio Mathematico Abrahamo de Moivre, quodque nobis erit veluti altera formula, qua lex gravita-

tis

tis solis quantitatibus finitis possit exhiberi: scilicet, quod iisdem ut supra manentibus, vis gravitatis in quolibet loco P, sit ut PS directè, radius vel diameter curvaturæ PX inversè, & cubus ex perpendiculo SY similiter inversè.

Nam rectæ PX, SY, velut perpendiculares ad tangentem PR, parallelæ sunt inter se; adeòque erit angulus VPX æqualis angulo PSY. Unde, quum similia sint triangula rectangula PVX, SYP, erit ut PV ad PX, ita SY ad PS; & consequenter PV æqualis erit plano ex PX in SY, applicato ad PS, & solidum ex PV in SY quadratum æquale plano-plano ex PX in cubum ex SY, applicato similiter ad PS. Quare vis gravitatis in puncto P, quæ est reciprocè, ut solidum ex PV in SY quadratum, erit quoque ut PS directè, & plano-planum ex PX in cubum ex SY inversè.

Habemus ergo quatuor formulas, pro determinandâ lege gravitatis, quæ requiritur ad hoc ut projectum describere possit datam figuram curvilineam; atque ex iis duæ quidem priores exhibent legem gravitatis quantitatibus, non modò finitis, verùm etiam indefinitè parvis; aliæ verò duæ eandem determinant solis quantitatibus finitis. Sed videamus modò, qua ratione formulæ istæ generales applicentur casibus specialibus

bus, incipientes à circuli circumferentiâ, quæ est curva omnium simplicissima.

Itaque si curva APQ sit circuli circumferentia, & punctum S, ad quod dirigitur vis gravitatis, sit ipsum circuli centrum, omnes allatæ formulæ ostendent nobis debere esse constantem, & uniformem vim gravitatis, quæ requiritur ad eam describendam. Nam primò, quum in hoc casu perpendiculum SY coincidat cum PS, & QT non differat à PQ; tam prima, quàm secunda formula dabit vim gravitatis in puncto P, ut QR directè, PQ quadratum inversè, & PS quadratum etiam inversè. Jam verò PS quadratum, est idem ubique, adeòque negligi potest. Itaque eadem vis gravitatis in puncto P est, ut QR directè, & PQ quadratum inversè, hoc est reciprocè, ut quotiens, qui oritur, dividendo PQ quadratum per QR; & consequenter, quia quotiens iste est ipsa dati circuli diameter, dabitur vis gravitatis in loco P.

Secundò, quia existente APQ circuli circumferentiâ, & S centro ejus, coincidunt inter se non modò rectæ PS, SY, verùm etiam rectæ PV, PX; tam tertia, quàm quarta formula dabit vim gravitatis in puncto P reciprocè, ut solidum ex PV in PS quadratum. Datur autem hoc solidum, quum PV sit ipsa circuli diameter, & PS

 ejus-

ejusdem radius, sive semidiameter. Quare dabitur quoque vis gravitatis in puncto P.

Constans autem, & uniformis esse debet gravitas, quæ requiritur ad circuli circumferentiam describendam, quotiescumque vis ipsa gravitatis tendit ad centrum circuli. Verumtamen si centrum virium S utcumque datum fuerit, tunc vis gravitatis in quolibet circumferentiæ loco P erit, ut quadratum distantiæ PS inversè, & cubus chordæ PV etiam inversè. Nam si AV sit circuli diameter, & C centrum ejus, quia angulus CPR, tamquam rectus, est æqualis duobus angulis A, & V simul sumptis, & angulus V est æqualis angulo CPV; erit angulus VPR æqualis angulo A: proindeque triangula rectangula APV, PYS similia erunt; eritque adeò ut AV ad PV, ita PS ad SY. Unde ob datam AV, erit SY, ut rectangulum ex PV in PS, & consequenter vis gravitatis in puncto P, quæ ob tertiam formulam est reciprocè, ut solidum ex PV in SY quadratum, erit reciprocè, ut plano-solidum ex cubo chordæ PV in quadratum distantiæ PS.

Fig. 118.

Ex quo patet, quod si punctum datum S, ad quod tendit semper vis gravitatis, locetur in circumferentiâ hujus circuli puta in V, vis gravitatis in omni loco P sit reciprocè, ut quadrato-cubus distantiæ PV.

Sed

Sed si punctum S fuerit adeò longinquum, ut lineæ omnes PS, QS ad illud ductæ pro parallelis haberi possint, tunc quia PS velut infinita data est, fiet vis gravitatis in puncto P reciprocè ut cubus chordæ PV, quæ designat directionem, secundùm quam agit vis gravitatis.

Sit secundò curva APQ ellipsis, cujus centrum sit punctum C, Aa axis major, Bb axis minor, PG, DK diametri conjugatæ, & PF, Qt perpendicula ad diametros. Tendat autem vis gravitatis ad ipsum ellipseos centrum C, ita ut positâ QR ipsi PG parallelâ, vel etiam completo parallelogrammo PRQu, sit vis gravitatis in puncto P juxta primam formulam, ut QR directè, Qt quadratum inversè, & PC quadratum etiam inversè. Dico, vim gravitatis in puncto P esse directè proportionalem distantiæ PC. FIG. 119.

Quoniam enim Qu, velut tangenti PR parallela, est ordinata diametri PG, erit ex conicis, ut Qu quadratum ad rectangulum PuG, ita DC quadratum ad PC quadratum. Sed, propter triangula similia Qut, PCF, Qt quadratum est ad Qu quadratum, ut PF quadratum ad PC quadratum. Quare, multiplicando ordine simul terminos utriusque proportionis, erit $Qu^2 . Qt^2$ ad $Qu^2 . PuG$, hoc est Qt quadratum ad rectangulum PuG, ita $DC^2 . PF^2$ ad $PC^2 . PC^2 = PC^4$.

Conſtat autem ex conicis, parallelogramma circa ellipſeos diametros quaſvis conjugatas deſcripta inter ſe æqualia eſſe. Itaque, quum ſit DC. PF = AC. BC, erit etiam $DC^2.PF^2 = AC^2.BC^2$; adeòque erit, ut Q*t* quadratum ad rectangulum P*u*G, ita $AC^2.BC^2$ ad PC^4.

Jam rectangulum P*u*G ſit ex P*u*, ſive QR in *u*G. Sed, propter arcum PQ indefinitè parvum, nihil obſtat, quominus ſcribatur PG, ſive 2PC pro *u*G. Itaque idem rectangulum P*u*G fiet ex QR in 2PC: proindeque erit, ut Q*t* quadratum ad rectangulum ex QR in 2PC, ita $AC^2.BC^2$ ad PC^4; ſive etiam ut Q*t* quadratum ad QR, ita $2.AC^2.BC^2$ ad PC^3. Unde, quum, ob datum $2.AC^2.BC^2$, cubus ex PC ſit, ut QR directè, & Q*t* quadratum inversè; erit vis gravitatis in puncto P, ut cubus ex PC directè, & quadratum ex eâdem PC inversè; adeòque directè proportionalis ipſi PC.

Si ellipſeos umbilicis ad centrũ accedentibus, vertatur ellipſis ipſa in circumferentiam circuli, corpus movebitur in perimetro hujus circuli, & vis ad centrum tendens, perinde ac paulò ante oſtenſum eſt, jam erit conſtans, & uniformis; quum diſtantia PC, velut ſemidiameter circuli prædicti, numquam mutetur. Sed ſi ellipſeos centro in infinitum abeunte, vertatur ellipſis

lipsis in parabolam, corpus movebitur in hac parabolâ, & vis tendens ad centrum infinitè distans, rursus fiet constans, & æquabilis; quum distantia PC, velut infinita, sit eadem ubique. Et denique, si coni sectio parabolica, inclinatione plani ad conum sectum mutatâ, vertatur in hyperbolam, movebitur corpus in hyperbolæ hujus perimetro; sed, quia centrum C abit ad partem alteram, vis centripeta gravitatis mutabitur in vim centrifugam, quæ adhuc distantiæ PC ubique proportionalis erit.

Mutari quoque potest ellipsis in lineam rectam, scilicet si ejus umbilici ad vertices accedant, quum hac ratione ellipsis latitudo eò usque minuatur, donec coincidat cum ipso axe majore *Aa*. Sed quorsum ista mutatio memoranda, quum jam cuique notum sit, descensum gravis rectilineum versus centrum fieri posse in quacumque gravitatis hypothesi? Illud potiùs exinde colligi potest, quod si vis gravitatis sit directè proportionalis distantiæ locorum à centro virium C, & grave corpus rectà descendat per altitudinem aliquam AM, tempus hujus descensus designari queat per arcum correspondentem AN circuli, qui describitur centro C, & intervallo CA, quemadmodum jam superiùs ex aliis principiis demonstravimus. FIG. 120.

Nam, ob naturam circuli, & ellipsis, atea

circularis ANM est ad aream ellipticam correspondentem APM, ut est MN ad MP. Sed in hac ratione est etiam triangulum MCN ad triangulum MCP. Quare componendo sector circularis ACN erit ad sectorem ellipticum ACP, ut est MN ad MP, hoc est in datâ ratione, quum MN sit ad MP, ut est AC ad BC. Jam verò, quum grave corpus describit circa centrum virium C arcum ellipsis AP, tempus designatur per sectorem ellipticum ACP. Itaque idem tempus per AP poterit etiam designari per sectorem circularem ACN, qui datam servat rationem cum sectore elliptico ACP, sive etiam per arcum AN, cui sector circularis ACN proportione semper correspondet. Unde, quia diminutâ ellipsis latitudine in infinitum, coincidit illa cum axe AC, & AP fit AM; erit tempus per AM similiter, ut arcus circuli correspondens AN.

Sed monitum hìc Lectorem velim, quod in hujusmodi demonstrationum speciebus, quæ fiunt per linearum transformationes, summâ opus sit solertiâ, & mentis acumine, quia fieri facilè potest, ut Nos in errores inducant. Exemplum hìc elegans dabimus, quod fortè nobis sese obtulit in eâ ipsâ materiâ, quam præ manibus habemus. Nimirum in hypothesi, quod ellipsis APQ describitur vi gravitatis tendente ad centrum C,

C, ostensum est à nobis, tempus per arcum AP designari per sectorem circularem ACN, sive etiam per arcum AN. Jam verò, ubi centrum C abit in infinitum, ellipsis APQ vertitur in parabolam, & arcus AN mutatur in rectam, quæ ipsi AC perpendicularis est infinitæ longitudinis. Itaque, quum grave corpus in hypothesi gravitatis constantis describit parabolam APQ tempus per quemlibet ejus arcum AP designabitur per rectam infinitam: unde consequens esse videtur, æqualia esse tempora per inæquales arcus parabolicos, quod equidem omninò à veritate est alienum.

Ab hac autem difficultate facillimè Nos expediemus, si considerabimus, centro C in infinitum abeunte, arcum AN non tam mutari in rectam lineam, quàm in parabolam aliam, cujus latus rectum est infinitum; adeòque tempus per arcum parabolicũ AP designari per arcũ correspondentem alterius hujus parabolæ, sive etiam per ejus ordinatam, quæ, ob abscissam AM indefinitè parvam respectu ejus, ab arcu illo non differt. Hinc enim facilè intelligemus, quod etsi tempus per arcum AP designetur per rectam infinitam, non hinc tamen colligi debeat, tempus illud esse datum; quandoquidem ordinata alterius illius parabolæ est, ut ordinata parabolæ prioris MP, quæ utique

data non est; quum notum sit, quod si circa eundem axem duæ quævis parabolæ describantur, ordinatæ unius datam servent rationem cum ordinatis correspondentibus alterius.

Et quidem, quod tempus per arcum parabolicum AP, quum describitur in hypothesi gravitatis constantis, sit ut ordinata ipsius parabolæ MP; id colligi primò potest ex ipso theoremate Newtoniano, superiori capite à nobis ostenso, quod projecta circa centrum virium subinde motum suum attemperent, ut radiis ad illud actis areas percurrant continuò temporibus proportionales. Nam in casu nostro centrum, ad quod dirigitur vis gravitatis, infinitè distat. Quare area, quæ percurritur circa centrum virium, quum describitur arcus AP, est rectangulum, quod fit ex rectâ infinitâ in ordinatam MP: proindeque, quum hoc rectangulum proportionale sit ipsi MP; & ipsa quoque area, sive tempus per AP eidem MP proportione semper correspondebit.

Secundò ostendi id etiam potest ratiocinio magis geometrico in hunc modum. Capiatur in parabolâ portio PO indefinitè parva, & demisso super ordinatâ MP perpendiculo OR, ductâque tangente PT, vocetur parameter parabolæ $4a$; AP, x; OR, dx;

dx; & PR, dy. Jam tempus per PO est, ut PO directè, & velocitas, qua describitur, inversè. Sed velocitas ista, ex superiùs ostensis, ea est, quæ acquiritur cadendo per $a+x$; adeòque designari potest per radicem quadratam ipsius $a+x$. Itaque tempus per PO est, ut exponens rationis, quam habet PO ad $\sqrt{a+x}$. Jam verò PO ad $\sqrt{a+x}$ rationem habet compositam ex PO ad PR, hoc est ex $PT = \sqrt{4ax + 4xx}$ ad $PM = \sqrt{4ax}$, & ex $PR = dy$ ad $\sqrt{a+x}$, hoc est ex $2dy\sqrt{x}$ ad $\sqrt{4ax + 4xx}$: nimirum componendo has rationes, ut dy ad $\sqrt{a}$. Quare idem tempus per PO erit, ut exponens rationis, quam habet PR, sive dy ad $\sqrt{a}$; adeòque proportionalis ipsi PR: Unde infertur, tempus per totum arcum AP proportionale esse ipsi PM.

Itaque, ut ad id, unde discessimus, iterum revertamur, quum grave corpus fertur in perimetro ellipsis APQ, & vis gravitatis tendit ad centrum C, vis illa in omni loco P est directè proportionalis distantiæ PC. Et quoniam, centro C eodem in loco manente, ellipsis APQ non in aliam curvam verti potest, quàm in circumferentiam circuli; facile exinde concludi potest, quod in hypothesi gravitatis directè proportionalis distantiæ locorum à centro grave corpus pro-

projectum describere vicissim debeat circa centrum virium, vel ellipsim, vel etiam circumferentiam circuli, in quam utique ellipsis migrare potest.

Neque verò difficile erit, casum distinguere, quum corpus describit ellipsim ab eo, quando circulum describere debet. Patet enim, circulum tunc tantùm describi posse, quum linea jactus normalis est ad eam, quæ locum corporis, & centrum virium conjungit. Esto igitur C centrum
FIG. 121. virium, & exeat corpus de loco A secundùm rectam ipsi AC normalem eâ cum velocitate, quæ acquiritur cadendo per AO, sitque ABa ellipsis, quam grave corpus motu suo describit. Concipiatur circa rectam OC scala virium COM, quæ, ob gravitatem directè proportionalem distantiæ locorum à centro, terminabitur rectâ CM. Tum centro C, & intervallo semiaxis conjugati CB describatur arcus BD; & ductâ in scalâ virium ordinatâ DH, erit ut quadratum velocitatis in A ad quadratum velocitatis in B, ita trapetium AOMN ad trapetium DOMH.

Et quoniam CA, CB normales sunt tangentibus in A, & B; per ea, quæ superius ostensa sunt, erunt velocitates in A, & B in reciprocâ ratione ipsarum CA, CB. Unde erit, ut CA^2 ad CB^2, ita trapetium DOMH

DOMH ad trapetium AOMN; hoc est ita $CO^2 - CB^2$ ad $CO^2 - CA^2$; atque adeò convertendo erit, ut $CA^2 - CB^2$ ad CB^2, ita $CA^2 - CB^2$ ad $CO^2 - CA^2$. Quocirca, quum sit $CO^2 = CA^2 + CB^2$; perspicuum est, tunc demum à corpore circulum describi, quum altitudo AO, unde cadendo acquiritur velocitas, cum qua corpus projicitur, talis est, ut quadratum ex CO duplum sit quadrati ex CA.

Ex eo autem quod sit $CO^2 = CA^2 + CB^2$ expedita etiam nobis suboritur methodus, ex datis altitudine AO, & semiaxe uno CA, determinandi semiaxem alterum, atque adeò definiendi ellipsim à corpore describendam: nimirum si centro C, & intervallo CO descripto arcu OF, erigatur ex loco corporis A perpendicularis AF, eum secans in F. Nam, quum sit CF^2, sive $CO^2 = CA^2 + AF^2$, erit AF semiaxis alter. Sed eadem determinatio obtinet etiam si corpus exeat de loco P; & linea jactus non sit perpendicularis ad PC. Nam si ipsius PC sit TC semidiameter conjugata, quam ad definiendam ellipsim oportet determinare, quia constat ex conicis, summam quadratorum duorum axium ellipseos æqualem esse summæ quadratorum, quæ fiunt ex duabus quibuslibet diametris conjugatis, erit CO^2, sive $CF^2 = CP^2 + CT^2$; adeòque datis semi-

midiametro unâ CP, & altitudine PF, unde cadendo acquiritur velocitas projecto invenietur constructione non dissimili semidiameter altera GT, cujus positio determinabitur per lineam jactus, quum ei parallela esse debeat.

In hac hypothesi gravitatis illud etiam notatu dignum occurrit, quod revolutionum in ellipsibus universis circa idem centrum factarum æqualia sint tempora periodica, etiamsi ellipses sint inæquales. Nam,
Fig. 120. quum grave corpus fertur in ellipsi APQ vi gravitatis tendente ad centrum C, tempus per quemlibet eius arcum AP est, ut arcus circularis correspondens AN. Quocirca si arcus AP dato tempore quam minimo describatur, multiplicando arcum circularem AN per numerum partium totius temporis periodici, habebitur circuli circumferentia tota. Ex quo sequitur, quòd totum tempus periodicum per perimetrum ellipsis sit conjunctim, ut tota circuli circumferentia directè, & arcus AN inversè; hoc est, ut exponens rationis, quam habet integra circuli circumferentia ad arcum AN. Data est autem ratio ista, quum arcus circularis AN correspondeat arcui elliptico AP, qui dato tempore quamminimo describitur. Quare dabitur quoque tempus periodicum per totam perimetrum ellipsis, & pro-

& propterea revolutionum in ellipsibus universis circa idem centrum factarum æqualia erunt tempora periodica.

Ex quo rursus liquet veritas ejus, quod ex aliis principiis superiùs ostensum fuit: nimirum, quod si vis gravitatis sit directè proportionalis distantiæ locorum à cenrro virium C, & grave corpus rectà descendat ad centrum usque, æqualia sint tempora descensus per altitudines quasvis AC, MC. Nam, quemadmodum æqualia sunt tempora periodica per integras ellipses, quæ describuntur circa centrum virium C, ita quoque æqualia erunt tempora per quadrantes earum ellipsium. Jam verò altitudines AC, MC considerari possunt velut quadrantes duarum ellipsium, quarum umbilici ad vertices accesserint. Quare tempora descensus per altitudines AC, MC etiam æqualia erunt.

Moveatur jam corpus in ellipsi APQ, sed vis gravitatis tendat, non quidem ad centrum C, sed ad unum ex umbilicis S, ita ut positâ QR ipsi PS parallelâ, ductâque QT eidem PS perpendiculari, sit vis illa in loco P, juxta primam formulam, ut QR directè, QT quadratum inversè, & PS quadratum etiam inversè. Esto H ellipseos umbilicus alter, & junctâ PH, agatur HI, ipsi PR, sive DK parallela. Quia igitur ex coni- FIG. 119.

nicis æquales sunt anguli, quos rectæ PH, PS constituunt cum tangente PR; erunt etiam æquales anguli PIH, PHI, qui sunt iis alterni; & consequenter æquales rectæ PI, PH. Sed propter æquales CS, CH æquales sunt quoque rectæ ES, EI. Itaque erit PE semisumma ipsarum PS, PH; adeòque æqualis dimidio axis majoris AC.

Et quoniam, propter triangula similia FPE, TQx, PF est ad PE, ut QT ad Qx; erit etiam, ut PF ad AC, ita QT ad Qx. Sed PF est ad AC, ut CB ad CD; & Qx est ad Qu in ratione æqualitatis. Quare erit ex æquali, ut CB ad CD, ita QT ad Qu; adeòque CB^2 erit ad CD^2, ut QT^2 ad Qu^2. Est autem ex conicis CD^2 ad PC^2, ut Qu^2 ad $Pu.uG$, sive etiam, ut Qu^2 ad $Pu.2PC$. Itaque erit ex æquali ordinando, ut CB^2 ad PC^2, ita QT^2 ad $Pu.2PC$. Jam verò, quum PC sit ad PE, sive AC, ut est Pu ad Px, sive QR; est etiam, ut PC^2 ad PC.AC, ita $Pu.2PC$ ad QR.2PC. Igitur ex æquo rursus ordinando erit, ut CB^2 ad PC.AC, ita QT^2 ad QR.2PC: proindeque erit $QT^2.AC = CB^2.2QR$; sive etiam $QT^2.Aa = Bb^2.QR$.

Porrò ellipseos latere recto principali dicto L, erit $L.Aa = Bb^2$. Unde, si in æquatione inventâ loco Bb^2 ponatur valor iste, erit $QT^2.Aa = L.Aa.QR$, hoc est $QT^2 = L$.

= L. QR. Ex quo patet, quotientem, qui oritur, dividendo QT^2 per QR, æqualem esse lateri recto principali L. Quocirca vis gravitatis in puncto P, quæ est, ut QR directè, QT quadratum inversè, & PS quadratum etiam inversè, erit reciprocè ut solidum, quod fit ex L in PS quadratum; hoc est, quia data est quantitas ipsius L, reciprocè, ut quadratum distantiæ PS.

Itaque, quum corpus movetur in ellipsi APQ, & vis gravitatis tendit ad umbilicum S, lex ejus hæc erit, ut in quolibet loco P sit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ PS. Sed hoc idem verum est etiam, quum corpus fertur in parabolâ, & hyperbolâ, vi ad umbilicum interiorem tendente. Nam, si manente umbilico S, abeat umbilicus alter H, vel in infinitum, vel etiam ad partem alteram respectu verticis *a*, tunc ellipsis mutabitur, vel in parabolam, vel in hyperbolam, & vis gravitatis adhuc manebit reciprocè proportionalis quadrato distantiæ PS. Quod si autem, manente umbilico altero H, ipse umbilicus S, ad quem dirigitur vis gravitatis, vel recedat in infinitum, vel migret ad partem oppositam; tunc ellipsis mutabitur quidem, vel in parabolam, vel in hyperbolam; verum in parabolâ fiet vis gravitatis constans, & uniformis; in hyperbola verò manebit quidem reci-

ciprocè proportionalis quadrato distantiæ PS, sed ex centripetâ evadet centrifuga.

Notatu autem dignum existimamus, quod hac occasione ostensum est in ellipsi, atque adeò in aliis conicis sectionibus, in quas utique ellipsis migrare potest: nimirum, quod si dividatur QT quadratum per QR, quotiens, qui ex hac divisione oritur, sit latus rectum principale conicæ sectionis. Hinc enim facillimè determinari poterit in omnibus conicis sectionibus diameter curvaturæ, sive etiam radius evolutæ, qui est semissis illius diametri. Nam, si PX sit diameter ista, & *Qxu* recta tangenti PR parallela, quæ conveniat cum PS in puncto *x*, & cum PX in puncto *u*; quemadmodum dividendo QT quadratum per QR, oritur latus rectum principale L, ita dividendo PQ quadratum per P*u* nascitur diameter curvaturæ PX: proindeque PX ad L rationem habebit compositam ex PQ quadrato ad QT quadratum, & ex QR, sive P*x* ad P*u*.

FIG. 117.

Jam, si super PS perpendicularis demittatur XV, & ducatur VZ perpendicularis ad PX, & ZW rursus perpendicularis ad PS; erunt triangula PQT, P*xu*, PZW, PVZ, PXV similia inter se. Quare erit, ut PQ quadratum ad QT quadratũ, ita PV ad PW, & ut P*x* ad P*u*, ita PX ad PV: proindeque

PX

PX ad L erit in ratione composita ex PV ad PW, & ex PX ad PV, hoc est in simplici illâ ratione, quam habet PX ad PW; eritque adeò PW æqualis lateri recto principali L. Unde, si vicissim super PS capiatur portio PW æqualis L, & erectâ perpendiculari WZ, quæ conveniat cum PX, secante tangentem PR ad rectos angulos, in puncto Z, ducatur ZV parallela tangenti PR, & VX parallela ipsi WZ; determinabit punctum X longitudinem diametri curvaturæ PX, cujus adeò semissis erit radius evolutæ correspondens puncto P.

Quod si punctum P fuerit vertex principalis conicæ sectionis, perpendicularis erit ad tangentem PR tam recta PS, quàm recta PX, adeòque coincident inter se duæ istæ rectæ lineæ PS, PX. Unde, quum etiam punctum X coincidat cum puncto W, fiet in hoc casu PW diameter curvaturæ. Ex quo patet, diametrum curvaturæ in vertice principali cujuscumque conicæ sectionis æqualem esse longitudini lateris recti, quod refertur ad verticem illum, & consequenter radium evolutæ in eodem illo vertice æqualem esse dimidio ejusdem lateris recti.

Ista porrò generalis constructio pro determinandâ diametro curvaturæ contrahi eleganter potest in hunc modum. Tangenti PR erigatur perpendicularis PX, quæ con-

veniat cum axe Aa in puncto c; tum sumptâ cZ ipsi Pc æquali, ducatur ZV perpendicularis ad PX, & VX perpendicularis ad PS; eritque rursus PX diameter curvaturæ. Quod quidem dependet ab hac pulcherrimâ sectionum conicarum proprietate: quod si ex puncto c super PS perpendicularis demittatur cm intercepta portio Pm æqualis sit dimidio lateris recti principalis.

Unde etiam faciliùs adhuc determinabimus radium evolutæ correspondentem puncto P, qui adæquat semissem ipsius PX: scilicet si ex puncto c erectâ super PX perpendiculari cd, quæ conveniat cum PS in puncto d, ducatur deinde dn perpendicularis super PS, conveniens cum PX in puncto n; quandoquidem erit Pn radius evolutæ quæsitus: id, quod exinde dependet, quia, quum sit, ut Pm ad Pd, ita PW ad PV, quemadmodnm Pm est semissis ipsius PW, ita quoque Pd semissis est ipsius PV.

CAP. IV.

De motu projectorum in hypothesi gravitatis, reciprocè proportionalis quadrato distantiæ.

Vidimus huc usque, qua ratione dedeterminandæ sint curvæ, quas descri-

ſcribunt projecta in quacumque gravitatis hypotheſi; & quo pacto viciſſim definiendæ ſint leges virium, quæ requiruntur, ut projecta moveri poſſint in curvis lineis datis. Verum, etſi de motu projectorum actum ſit in quacumque gravitatis hypotheſi; attamen quemadmodum ea, quæ ad motum illum ſpectant, in hypotheſi gravitatis conſtantis, viſum eſt ſigillatim, & paulò fuſiùs oſtendere, quia talis eſſe creditur gravitas poſt Galilæum in corporibus terreſtribus; ita, quæ ad eundem motum pertinent, in hypotheſi gravitatis, reciprocè proportionalis quadrato diſtantiæ, ſeorſim, & paulò diligentiùs ſunt proſequenda, quia in corporibus cœleſtibus hujuſmodi obtinet lex gravitatis.

Ut enim alibi dictum eſt, planetæ tum primarii circa ſolem, cum ſecundarii circa ſuos primarios ſubinde motus ſuos attemperant, ut deſcribant totidem orbes ellipticos, umbilicos habentes in corporibus illis, & areas percurrant circa illa corpora continuò temporibus proportionales. Itaque, quia, ut ſuperiùs demonſtravimus, æquabilis arearum deſcriptio index eſt centri virium; dirigetur vis, qua quiſque planeta detorquetur de curſu ſuo rectilineo, quem ex naturâ ſuâ affectat, ad unum ex umbilicis orbis elliptici, quem deſcribit; & propterea ipſa illa vis in planetis primariis erit reci-

 pro-

procè proportionalis quadrato distantiæ à sole, in planetis verò secundariis reciprocè proportionalis quadrato distantiæ à suis primariis.

Quin & Celeberrimo Newtono, cui primum suborta sunt hujusmodi cogitata, illud etiam verissimum videtur, hanc legem gravitatis obtinere quoque in corporibus terrestribus, eâ nempe ratione, quia vis gravitatis, qua luna detinetur in orbe suo, videtur esse ejusdem naturæ cum vi gravitatis corporum terrestrium, in quantum duabus hisce viribus propè telluris superficiem æqualia spatia æqualibus temporibus describerentur. Unde in eam sententiam, meo quidem judicio non contemnendam, abiit, ut iisdem omninò legibus gravitent, tum corpora terrestria in terram, tum planetæ primarii in solem, tum denique planetæ secundarii in suos primarios.

Itaque, quum hypothesis gravitatis, reciprocè proportionalis quadrato distantiæ obtineat saltem in corporibus cœlestibus; videamus, quæ debeant esse projectorum accidentia in hac gravitatis hypothesi. Et primò quidem illud quæri potest, num positâ hac specie gravitatis, præter sectiones conicas, habentes umbilicum interiorem in centro virium, possint projecta curvas alias describere. Planè id videtur supposuisse Ne-

Newtonus in primâ suorum principiorum editione. Verumtamen, etsi hoc verissimum sit, attamen si nullâ ratione fulciatur, semper poterit in dubium revocari. Nam corpus motum in spirali nauticâ, sive logarithmicâ, quæ scilicet radios secat in dato angulo, ut facilè ostendi potest, urgetur vi centripetâ, reciprocè proportionali cubo distantiæ à centro spiralis; sed eodem notante Newtono non hæc sola spiralis, sed infinitæ aliæ possunt vi illâ describi.

Primus, quem sciam, Geometra Peritissimus Jacobus Hermannus id ostendere aggressus est in Diario Veneto, mediante calculo integrali; sed, ut rectè observavit Johannes Bernoullius, methodo, cui institit, scopum attingere nequaquam potuisset, nisi aliunde ei notum esset, solas conicas sectiones posse quæsito satisfacere. Hinc ipse Bernoullius aliam demonstrationem loco ejus substituit, deductam ex generali solutione problematis de determinandis curvis, quæ in quacumque gravitatis hypothesi à projectis describuntur. Verum, ut videre est in Monumentis Regiæ Scientiarum Academiæ Parisiensis anni 1710, est adeò perplexa, & implicata, tantasque exigit reductiones, & operationes satis molestas, ac laboriosas, ut eam hìc Tyronibus nostris afferre nequaquam operæ pretium duxerim.

Clarissimus Gregorius in Elementis Astronomiæ Physicæ, & Geometricæ exinde collegit, solas conicas sectiones describi posse motu projectorum, quotiescumque vis gravitatis est reciprocè proportionalis quadrato distantiæ; quia ellipsis, quæ est una ex curvis tali virium lege describendis, per motum alterius umbilici, non in alias curvas, quàm in parabolam, & hyperbolam mutari potest: quæ ratio apud eos, qui probè norunt systema curvarum, omne momentum obtinebit. Sed tandem ipse Newtonus in alterâ suorum principiorum editione talem hujus rei demonstrationem indicavit, quæ facilis est, & expedita, nec ullum Tyronum animis scrupulum relinquit: nimirum, quod curvatura curvæ describendæ ex datis velocitate, vi centripetâ gravitatis, & positione tangentis detur; & datis umbilico, puncto contactus, & positione tangentis describi semper possit sectio conica, quæ curvaturam illam datam habeat; nec fieri ullo pacto queat, ut figuræ duæ curvilineæ se mutuò tangentes eâdem vi centripetâ describantur.

Et primò quidem, quod figuræ duæ curvilineæ se mutuò contingentes eâdem vi centripetâ describi nequeant, colligi id potest ex generali theoremate Newtoniano, quod areæ, quas corpora radiis ad centrum

vi-

virium actis describunt, sint continuò temporibus proportionales. Porrò, quod ex datis velocitate, vi centripetâ, & positione tangentis detur curvatura curvæ describendæ, id etiam constat. Nam, si velocitas, qua cùm corpus exit de loco P ea sit, qua lineola PR in minimâ aliquâ temporis particulâ describi possit, & vis centripeta potis sit eodem tempore corpus idem movere per spatium QR; designabit angulus QPR curvaturam figuræ describendæ. Itaque tantùm superest, ut ostendamus, ex datis umbilico, puncto contactus, & positione tangentis describi semper posse sectionem conicam, quæ curvaturam illam datam habeat. Fig. 117.

Id autem ostendemus in hunc modum. Sit S umbilicus datus, PR tangens, P punctum contactus, & P*n* perpendicularis ad PR radius datæ curvaturæ. Ex *n* in PS demittatur perpendiculum *nd*, tum ex *d* in P*n* perpendiculum *dc*, jungaturque S*c*. Fiat porrò anguli RPS complementum ad duos rectos angulus RPH. Et siquidem PH parallela sit ipsi S*c*, figura erit parabola, quæ datis umbilico S, & puncto P, per quod transire debet, facile describetur, capiendo pro axe ejus rectam S*c*. Quod si verò PH conveniat cum S*c* in puncto aliquo H, tunc figura erit, vel hyperbola, vel ellipsis; hy-

perbola, si puncta S, & H cadant ad eandem partem puncti c; ellipsis verò, si cadant ad partes contrarias: sed utraque describetur, assumendo punctum H velut umbilicum alterum.

Hujus determinationis ratio pendet ex methodo determinandi radium curvaturæ in sectionibus conicis, quam in calce capitis antecedentis attulimus. Nam, quod sectionem conicam tali pacto determinatam tangat in puncto P recta PR, id utique constat ex constructione, quum anguli RPS sit complementum ad duos rectos angulus RPH. Quare tantùm restat, ut ostendamus ejusdem conicæ sectionis Pn esse radium curvaturæ in puncto P. Quod quidem abundè patebit, si memores ejus methodi determinandi radium curvaturæ, consideremus, quod quæcumque sit sectio conica, axis ejus sit recta Sc, & Pc perpendicularis sit ad tangentem PR.

Itaque, si de loco P exeat corpus secundùm rectam PR, & urgeatur vi centripetâ reciprocè proportionali quadrato distantiæ PS, movebitur hoc corpus in conicâ aliquâ sectione, cujus umbilicus erit centrum virium S. Sed, si velocitas, cum qua corpus exit de loco suo P, ea sit, qua lineola PR in minimâ aliquâ temporis particulâ describi possit, & vis centripeta potis sit eodem

tem-

tempore corpus idem movere per spatium QR; demisso super PS perpendiculo QT, erit latus rectum principale conicæ sectionis quotiens, qui oritur, dividendo QT quadratum per QR; prout in calce capitis antecedentis adnotavimus.

Idem autem latus rectum principale conicæ sectionis est in duplicatâ ratione areæ PSQ, quæ dato tempore describitur. Nam, quum ejusmodi latus rectum oriatur, dividendo QT quadratum per QR, erit illud ut QT quadratum directè, & QR inversè. Sed lineola QR, velut dato tempore descripta, est, ut vis centripeta in loco P, hoc est per hypothesim, ut PS quadratum inversè. Itaque idem latus rectum erit, ut QT quadratum directè, & PS quadratum etiam directè; adeòque in duplicatâ ratione areæ PSQ.

Atque hinc, si sectio conica sit ellipsis, erit tempus periodicum in sesquiplicatâ ratione axis majoris. Nam ellipseos area tota, eique proportionale rectangulum sub axibus est, ut area PSQ, quæ dato tempore describitur, ducta in tempus periodicum; adeòque in subduplicatâ ratione lateris recti, & ratione temporis periodici. Unde, si axis major dicatur a, axis minor b, latus rectum l, & tempus periodicum t; erit ab, ut $t\surd l$, & consequenter a^2b^2, ut ttl. Est au-

autem $b^2 = al$. Itaque factâ substitutione erit $a^3 l$, ut ttl; hoc est a^3, ut tt. Unde quadratum temporis periodici erit, ut cubus axis majoris; adeòque ipsum tempus periodicum in sesquiplicatâ ratione ejusdem axis.

Hinc obiter notetur hoc loco velim, tertiam illam legem, quam in motibus planetarum primariorum observavit Sagacissimus Keplerus, nempe quod subinde motus suos circa solem attemperent, ut quadrata temporum periodicorum sint, ut cubi mediarum à sole distantiarum, colligi quoque posse absque ullâ observatione ratiocinio geometrico ex aliis duabus legibus à Keplero deprehensis; scilicet, quod describant ellipses totidem, in sole umbilicum unum habentes; & quod radiis ad solem actis areas percurrant temporibus proportionales. Nam ex duabus hisce legibus, ut superiùs vidimus, sequitur planetas primarios gravitare in solem, & cujusque vim gravitatis decrescere in duplicatâ ratione distantiæ. Unde legibus à Keplero observatis ultrò præstanda fides; quum non modò non opponantur, sed mirè consentiant inter se.

FIG. 121. 122. Sit jam ellipsis ABa, & ex vertice ejus principali A exeat grave corpus secundùm tangentem AR, vi tendente ad umbilicum

S;

S; requiritur velocitas, qua corpus illud projici debet, ut possit datam ellipsim describere. Referat AO altitudinem, unde cadendo acquiritur velocitas illa, sitque SOMN scala virium. Esto K ellipseos umbilicus alter, C centrum ejus, & BC semiaxis minor. Denique centro S intervallo SB describatur arcus BD, ducaturque in scalâ virium ex puncto D ordinata DH.

Quoniam igitur SOMN est scala virium, designabit area AOMN quadratum velocitatis, quam corpus habet in A, & area DOMH quadratum velocitatis, quam idem corpus habet in B. Sed ex superius ostensis eædem velocitates sunt reciprocè, ut perpendicula, quæ ex centro virium S ducuntur in rectas, tangentes ellipsim in A, & B, hoc est in reciprocâ ratione rectarum AS, BC. Quare erit ex æquali, ut area AOMN ad aream DOMH, ita BC quadratum, sive rectangulum AS*a* ad AS quadratum; hoc est ita S*a*, sive AK ad AS.

Jam vires designatæ per ordinatas OM, AN, DH sunt reciprocè, ut quadrata distantiarum OS, AS, DS. Quare terminabitur scala virium illâ eâdem hyperbolâ cubicâ, quæ nobis se obtulit in capite primo sectionis antecedentis: proindeque, per ea, quæ ibidem ostensa sunt, area AOMN ad aream DOMH habebit rationem composi-

tam

tam ex AO ad DO, & ex DS ad AS. Unde erit rursus ex æquali, ut AK ad AS, ita rectangulum ex AO in DS ad rectangulum ex DO in AS. Est autem AK ad AS, ut rectangulum ex DO in AK ad rectangulum ex DO in AS. Quare erit rectangulum ex DO in AK æquale rectangulo ex AO in DS; eritque adeò, ut AO ad DO, ita AK ad DS, sive BS, vel AC.

Et quoniam AO est ad DO, ut AK ad AC; erit dividendo, ut AO ad AD, ita AK ad CK. Sed, propter æquales AC, DS, æquales sunt quoque rectæ AD, CS, sive etiam rectæ AD, CK. Itaque erit pariter AO æqualis AK. Ex quo patet, altitudinem AO, unde cadendo acquiritur corpori velocitas quæsita, æqualem esse distantiæ alterius umbilici K ab ipso vertice principali A, unde corpus egredi debet.

Ponamus punctum S, ad quod tendit vis centripeta, esse ellipseos umbilicum inferiorem, & manente umbilico altero K, abeat ille in infinitum. Vertetur itaque ellipsis in parabolam, & corpus movebitur in hac parabolâ gravitate constanti, & uniformi, eritque altitudo AO æqualis quartæ parti lateris recti principalis, quum in parabolâ latus rectum principale sit quadruplum ipsius AK. Sed si centrum virium S sit ellipseos umbilicus superior, eoque manente, abeat

abeat alter K in infinitum, mutabitur quidem ellipsis in parabolam, sed corpus illam describet vi reciprocè proportionali quadrato distantiæ à centro virium S, & altitudo AO, velut æqualis AK, prodibit infinita.

Horum primum jam ex aliis principiis ostensum fuit, quum egimus de motu projectorum in hypothesi gravitatis constantis. Sed & alterum, velut prorsus memorabile, ostendi quoque potest in hunc modum. Sit AB parabola describenda, cujus A sit vertex principalis, S umbilicus, sive centrum virium, AO altitudo quæsita, & SOMN scala virium. Erigatur ad AS perpendiculum SB, & centro S, intervallo SB describatur arcus BD, ducaturque in scalâ virium ordinata DH. Designabit itaque area AOMN quadratum velocitatis, quam corpus habet in A, & area DOMH quadratum velocitatis, quam idem corpus habet in B. FIG. 123.

Et quoniam propter æquales SB, SD, recta BD tangit parabolam in B, demisso in BD perpendiculo SV, erunt eædem velocitates corporis in A, & B in reciprocâ ratione rectarum AS, SV. Quare erit ex æquali, ut SV quadratum ad AS quadratum, ita area AOMN ad aream DOMH. Sed ratio harum arearum componitur ex AO ad DO, & ex DS ad AS; adeòque est æqualis rationi, quam

quam habet rectangulum ex AO in DS ad rectangulum ex DO in AS. Itaque erit rursus ex æquali, ut SV quadratum ad AS quadratum, ita rectangulum ex AO in DS ad rectangulum ex DO in AS.

Porrò, quum ex conicis SB dupla sit ipsius AS, erit SB quadratum quadruplum quadrati ex AS. Sed, propter æquales SB, DS, & ob angulum rectum DSB, idem SB quadratum duplum est quadrati, quod fit ex perpendiculo SV. Itaque erit SV quadratum duplum AS quadrati. Ostensum est autem, SV quadratum esse ad AS quadratum, ut est rectangulum ex AO in DS ad rectangulum ex DO in AS. Quare erit etiam rectangulum ex AO in DS duplum rectanguli ex DO in AS, adeòque æquale rectangulo, quod fit ex DO in duplum ipsius AS.

Jam duplum ipsius AS est recta SB, sive DS. Itaque rectangulum ex AO in DS æquale est rectangulo ex DO in DS: proindeque æquales erunt rectæ lineæ AO, DO. Est igitur AO talis magnitudinis, ut non differat à se ipsâ, multatâ rectâ AD, sive AS. Quare AS, quæ est quarta pars lateris recti principalis, evanescit respectu ipsius AO: quod non aliter fieri posse perspicuum est, nisi AO sit infinita.

Itaque generaliter, tum in ellipsi, cùm in hyperbolâ velocitas, qua corpus exire debet

bet ex vertice principali, ut vi tendente ad unum ex umbilicis eam describat, tanta esse debet, quanta acquiritur cadendo per altitudinem æqualem distantiæ ejusdem verticis principalis ab umbilico altero. Sed hoc idem obtinet quoque, quum non ex principali, sed ex alio quolibet vertice corpus egreditur. Nam si centro S, & intervallo cujuslibet distantiæ SP describatur arcus PQ, velocitas in P tanta erit, quanta acquiritur cadendo per OQ: & profectò, quum sit $SO = Aa = SP + PK$, erit $OQ = PK$. Unde, quum orbita est parabolica, ex quocumque loco corpus egrediatur, erit semper prædicta altitudo æqualis quartæ parti parametri, quæ ad locum illum refertur, quum vis tendit ad umbilicum infinitè distantem; & verò erit infinita, quum ad umbilicum alterum vis illa dirigitur.

Eadem determinatio obtinet etiam in hyperbolâ, in quam utique vertitur ellipsis, umbilico altero ad partem verticis oppositam abeunte, ut calculum ineunti facile constabit. Verum ex eo, quod in hyperbolâ umbilicus alter jaceat ad partem oppositam verticis respectu ejus, ad quem dirigitur vis centripeta; altitudo illa invenietur quidem ubique æqualis distantiæ corporis ab umbilico altero, sed prodibit semper negativa; adeòque collocanda erit ad par-

tem

tem contrariam, hoc est versus ipsum virium centrum. Unde consequens fit, ut sicuti ad describendam parabolam eâ opus sit velocitate, quæ acquiritur cadendo ex infinitâ distantiâ; ita ad describendam hyperbolam velocitas tanta esse debeat, quanta acquiritur cadendo ex distantiâ plusquàm infinitâ.

Denique illud ostendendum nobis superest, qua ratione corporis in orbe elliptico moti, vi tendente ad unum ex umbilicis ejus, possit inveniri locus ad tempus assignatum. Res autem eò redit, ut abscindatur ex orbe elliptico per rectam, ex centro virium ductam, area dato tempori proportionalis. Id fieret geometricè, si ex dato tempore prodiret area illa per æquationem finitam. Verum nec in ellipsi, nec in aliâ figurâ ovali, quæ non tangatur à figuris conjugatis in infinitum pergentibus, potest area, rectis pro lubitu abscissa, per finitas æquationes generaliter inveniri: cujus rei sequentem demonstrationem Newtonus excogitavit in Principiis suæ Philosophiæ Mathematicis.

Intra ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceù polum revolvatur perpetuò linea recta, uniformi cum motu, & interea in rectâ illâ exeat punctum mobile de polo, pergatq; semper eâ cum velocitate, quæ sit.

ſit, ut rectæ illius intra ovalem quadratum. Hoc motu punctum illud deſcribet ſpiralē gyris infinitis. Jam, ſi areæ ovalis à rectâ illâ abſciſſæ incrementum per finitam æquationem inveniri poteſt, invenietur etiam per eandem æquationem diſtantia puncti à polo, quæ huic areæ proportionalis eſt; adeòque omnia ſpiralis puncta per æquationem finitam inveniri poterunt. Quod utique falſum eſt; nam, quum ſpiralis in infinitis numero punctis à rectâ ſecetur, æquatio puncta ejus determinans, ut jam Geometris notum eſt, ad infinitas dimenſiones aſcendere debet.

Quod autem in hac ſpirali diſtantia cujuſque puncti à polo proportionalis ſit areæ ovalis correſpondenti, oſtendi poteſt in hunc modum. Dividatur tempus revolutionis in particulas quamminimas, & æquales. Et quoniam recta circa polum revolvitur motu uniformi, ſingulis temporis particulis, percurret circa polum angulos æquales; adeòque areolæ abſciſſæ, velut totidem ſectores ſimiles, erunt ut quadrata rectarum, per quas abſcinduntur. Jam verò quadratis iſtis proportionalia ſunt ſpatiola, quæ iiſdem temporum particulis percurrit punctum, quod de polo exit; quum ex hypotheſi eā ſemper pergat velocitate, quæ ſit, ut rectæ, ſuper qua movetur, intra ovalem quadra-

 tum.

tum. Itaque hæc eadem ſpatiola proportionalia erunt areolis illis; & propterea componendo ſpatium totum, hoc eſt diſtantia puncti à polo ubique proportionalis erit correſpondenti areæ ovalis.

Quum igitur area ellipſis, quæ deſcribitur radio ab umbilico ad corpus mobile ducto, non prodeat ex dato tempore per æquationem finitam, fit hinc, ut nequeat inveniri geometricè locus mobilis ad tempus aſſignatum. Id novit in motibus planetarum ipſe Keplerus Pater Aſtronomiæ Ellipticæ. Unde illi ἀγεωμετρίαν objiciebant Aſtronomi alii, eumque, quaſi cauſis phyſicis nimiùm indulgentem, à Geometriâ in diverſum abiiſſe exiſtimabant, Sed maluit Vir Sagaciſſimus in hoc negotio methodum indirectam adhibere, quàm aliam à naturali hypotheſim uſurpare, in qua iſtud faciliimè, & directè fieri poſſet.

Uſurpavit verò hypotheſim aliam Celeberrimus Aſtronomus Sethus Wardus; nam etſi planetæ orbitam cum Keplero ſtatuerit ellipticam, in cujus umbilico altero ſol eſſet, attamen planetæ motum ſubinde circa alterum umbilicum temperari voluit, ut temporibus æqualibus æquales illic angulos abſolveret. Eandem Wardi hypotheſim inſcius ſuppoſuit etiam Iſmael Bullialdus, nec id priùs agnovit, quàm Wardus in Aſtro-

ſtronomiæ illius fundamenta inquireret. Sed dum ſuam Aſtronomiam Philolaicam adverſus Wardum tuebatur, correctionem Wardianæ hypotheſis talem excogitavit, ut etſi hypotheſis ipſa à naturali fit aliena, calculus tamen non multùm ab obſervatis abluderet.

Eandem Wardi hypotheſim ſeriò etiam aſſumpſit Comes Paganus. Verum, quum in orbe elliptico æquabilis angulorum deſcriptio circa umbilicum ſuperiorem deſtruat deſcriptionem æquabilem arearum circa ſolem, qui umbilicum occupat inferiorem; id potiùs in Aſtronomiâ Keplerianâ mutandum cenſuit Clariſſimus Aſtronomus Dominicus Caſſinus, ut loco orbitæ ellipticæ orbis alius ſubſtituatur, in quo æquabilis eſſet, tum deſcriptio angulorum, facta circa punctum unum, tum deſcriptio arearum, quæ circa aliud punctum ſoli tribuendum peragitur.

Orbem iſtum Domino Caſſino licuit invenire, eumque detexit oportere talis eſſe naturæ, ut conſtans eſſet non ſumma rectarum, quæ à quolibet orbis puncto ducuntur ad umbilicos, ſed rectangulum ex iis. Verum omnes, quotquot ſunt hodie, ſaniores Aſtronomi agnoſcunt, quod ſicuti orbita circularis, pro explicandis motibus planetarum, circa medias longitudines eſt

nimis lata; ita orbita Cassiniana peccet è contrario gracilitate nimiâ iisdem in locis. Unde, quod summo conatu detexit Cassinus, ipsis observationibus irritum evasit.

Hæc idcircò referre volui, ut constet, nec phænomenis cœlestibus, nec causis physicis satisfieri, si à Kepleriano systemate recedamus; adeòque omninò necessariam esse problematis hujus solutionem, de abscindēdâ per rectam ex umbilico ductam areâ ellipticâ, quæ sit dato tempori proportionalis. Id igitur, quum geometricè fieri nequeat, per cycloidem protractam, descriptam nempe per punctum, sumptum intra perimetrum rotæ revolventis, quæ est curva mechanica, sive trascendens, præstitit Newtonus in Principiis suæ Philosophiæ Mathematicis, imitatus hac in re Clarissimum Wallisium. Verum, notante eodem Newtono, quum difficilis sit hujus curvæ descriptio, præstat solutionem verò proximam adhibere.

Et quidem problematis hujus, adeò vulgati inter Peritiores Geometras, plures solutiones per approximationem, sive series infinitas excogitatæ sunt; sed inter omnes non aliam magis expeditam, & praxi commodam invenio, quàm allatam à sæpiùs laudato Newtono in Principiis suæ Philosophiæ Mathematicis. Pro ejus autem intelle-

ctu,

ctu; ostendendum est prius hoc theorema, quod si ellipseos APB sit AB axis major, O centrum, S umbilicus unus, & PR aliqua ad axim ordinatim applicata; descriptoque centro O, & intervallo OA, sive OB circulo AQB, producatur PR usque ad Q: quod inquam area elliptica ASP sit, ut differentia inter arcum AQ, & rectam SI, ab umbilico S in radium OQ perpendiculariter demissam. Fig. 124.

Nam area elliptica ARP est ad aream circularem correspondentem ARQ in datâ ratione, in eâ nempe, quam habet PR ad QR, sive axis minor ellipsis ad axem majorem. Sed in eâdem ratione est etiam triangulum PSR ad triangulum QSR. Itaque dividendo (vel componendo) habebit quoque area elliptica ASP datam rationem ad aream circularem ASQ. Jam verò area circularis ASQ est semper differentia inter sectorem AOQ, & triangulum OQS; adeòque æqualis ei, quod producitur, multiplicando semissem radii OQ per differentiam inter arcum AQ, & rectam SI. Quare area elliptica ASP proportionalis erit huic producto; atque adeò, ob datum radium OQ, proportionalis differentiæ inter arcum AQ, & rectam SI.

Hoc ostenso theoremate, pergamus ad solutionem problematis Newtonianã de ab-

 scin-

ſcindendâ per rectam ex umbilico ductam areâ ellipticâ dato tempori proportionali, vel, quod idem eſt, de inveniendo loco, in quo corpus in ellipſi motum vi ad umbilicum tendente reperiri debet ad tempus aſſignatum. Per conſtructionem quamvis, vel utcumque conjecturam faciendo, cognoſcatur corporis locus P, proximus verò ejus loco *p*; demiſsâque ad axem ellipſeos ordinatim applicatâ PR, ex proportione axium ellipſeos, dabitur circuli circumſcripti AQB ordinatim applicata QR, quæ quum ſit ſinus anguli AOQ, exiſtente radio OA, ſive OQ, dabitur etiam ipſe angulus AOQ; ſed in praxi ſufficit, angulum iſtum rudi calculo in numeris proximis invenire.

Cognoſcatur etiam angulus tempori proportionalis, ideſt qui ſit ad quatuor rectos, ut eſt tempus, quo corpus deſcripſit arcum *Ap*, ad tempus revolutionis unius in ellipſi, ſitque angulus iſte N. Porrò inveniatur tum angulus quidam B, qui ſit ad angulum graduum 57, 29578, quem arcus radio æqualis ſubtendit, ut eſt OS ad OA; tum etiam longitudo quædam L, quæ ſit ad radium in eâdem ratione inversâ, hoc eſt ut OA ad OS. Denique capiatur, & angulus D ad angulum B, ut eſt ſinus anguli AOQ ad radium; & angulus E ad angulum N — AOQ + D, ut eſt longitudo L ad longi-

gitudinem eandem L, cosinu anguli AOQ diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam, ubi major. Dico, angulum AOq, qui determinat verum corporis locum p, æqualem esse angulo AOQ + E.

Neque verò difficile id erit ostendere. Nam si arcus At sit mensura anguli N; dato tempori proportionalis, erit area elliptica ASp, ut arcus At. Sed ex ostenso theoremate eadem area elliptica ASp est, ut differentia inter arcum Aq, & rectam Si. Itaque erit recta Si æqualis arcui tq. Eodem ratiocinio ostendetur, quod si arcus AT sit mensura anguli proportionalis tempori, quo corpus descripsit arcum AP, recta SI æqualis sit arcui TQ. Quare differentia inter rectas SI, Si æqualis erit differentiæ inter arcus TQ, tq, sive etiam inter arcus Tt, Qq; hoc est, posito, quod angulus AOQ sit recto minor, quemadmodum eum jam schema exhibet, erit Si — SI, ideſt $Ii = $ Qq — Tt.

Et quoniam ex constructione habetur; tum angulus B ad angulum graduum 57, 29578, quem arcus radio æqualis subtendit, ut est OS ad OA; tum angulus D ad angulum B, ut est sinus anguli AOQ ad radium, hoc est ut QR ad OQ, sive etiam ut SI ad OS: assumpto in circumferentiâ circuli AQR arcu æquali radio OA pro mensurâ anguli graduum 57, 29578; erit ar-

cus ejusdem circumferentiæ æqualis rectæ OS mensura anguli B, & arcus ejusdem adhuc circumferentiæ æqualis rectæ SI mensura anguli D. Est autem in circumferentiâ AQB, TQ arcus æqualis rectæ SI. Itaque erit arcus TQ mensura anguli D; & propterea mensura anguli N — AOQ † D erit arcus At — AQ † TQ, hoc est arcus Tt.

Fiat porrò, ut OS ad OA, ita OA ad OG: adeo, ut existente OA radio, sit OG longitudo L, & RG eadem longitudo L, cosinu anguli AOQ diminuta, ubi angulus iste recto minor est, aucta, ubi major. Quia igitur OS est ad OA, ut OA ad OG, & OS est ad OA, sive OQ, ut OI, sive Ol ad OR; erit ex æquali, ut Ol ad OR, ita OA, sive OQ ad OG; atque adeò permutando, ut Ol ad OQ, ita OR ad OG. Sed, propter sectores similes Oli, OQq, Ol est ad OQ, ut li, sive Qq — Tt ad Qq. Quare erit rursus ex æquali, ut OR ad OG, ita Qq — Tt ad Qq; & propterea OG erit ad RG, ut Qq ad Tt.

Jam ex constructione angulus E est ad angulum N — AOQ † D, ut est longitudo L ad longitudinem eandem L diminutam (vel auctam) cosinu anguli AOQ, hoc est ut OG ad RG. Itaque erit ex æquali, ut angulus E ad angulum N — AOQ † D, ita Qq ad Tt. Ostensum est autem, arcum Tt men-

menſuram eſſe anguli N — AOQ ✝ D. Quare erit arcus Q*q* menſura anguli E. Sed arcus Q*q* metitur quoque angulum QO*q*. Erit igitur angulus E æqualis angulo QO*q*; & propterea totus angulus AO*q* æqualis erit angulo AOQ ✝ E.

Verum notare hoc loco oportet, angulum E æqualem oriri angulo QO*q*, quum locus P eſt adeò proximus vero corporis loco *p*, ut pro differentiâ rectarum SI, S*i* ſumi poſſit *li*, quemadmodum jam à nobis in demonſtratione factum eſt. Sed ſiquidem non tanta ſit proximitas eorum locorum, tunc angulus E minor ſemper orietur angulo QO*q*; atque adeò, ut anguli AO*q* verus valor inveniatur, inſtituenda erit iterum, atque iterum operatio, capiendo ſemper pro angulo AOQ ipſum angulum AOQ unà cum illo, qui in antecedenti operatione lucratus eſt. Nimirum, quemadmodum primâ vice accipitur, & angulus D ad angulum B, ut eſt ſinus anguli AOQ ad radium, & angulus E ad angulum N — AOQ ✝ D, ut eſt longitudo L ad longitudinem eandem L coſinu anguli AOQ diminutam, ubi angulus iſte recto minor eſt, auctam, ubi major. Ita ſecundâ vice capiendus erit, tum angulus F ad angulum B, ut eſt ſinus anguli AOQ ✝ E ad radium; tum angulus G ad angulum N — AOQ — E ✝ F, ut eſt longitudo

L ad

L ad longitudinem eandem L cosinu anguli AOQ † E diminutam, vel auctam, prout angulus iste recto minor est, vel major. Et tertiâ vice, tum angulus H ad angulum B, ut est sinus anguli AOQ † E † G ad radium; tum angulus I ad angulum N — AOQ — E — G † H, ut est longitudo L ad eandem longitudinem L cosinu anguli AOQ † E † G diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam, ubi major. Atque ita in infinitum. Hac enim ratione fiet angulus AO*q* æqualis angulo AOQ † E † G † I † &c.

Præterea notare etiam hoc loco oportet, fieri quandoque posse, ut angulus N — AOQ † D sit negativus, nimirum, quum locus P est ultra verum corporis locum *p*, ita ut, & AP major sit, quàm A*p*; & AQ major, quàm A*q*. Id itaque quum accidit, angulus E non quidem addendus, sed demendus est ex angulo AOQ, hoc est signum positivum ipsius E ubique mutandum est in negativum, & signum negativum vicissim in positivum. Idem autem intelligi debet de signis angulorum G, & I, ubi anguli N — AOQ — E † F, & N — AOQ — E — G † H negativi prodeunt.

Denique notabimus hoc loco, quod si excentricitas ellipseos, in qua corpus revolvitur, augeatur in infinitum: ita, ut umbi-

bilico altero in infinitum abeunte, vertatur ellipsis ipsa in parabolam; tunc problema, de quo agimus, evadet geometricum, quandoquidem area parabolica, per rectam ex umbilico ductam abscindenda, ex dato tempore, cui proportionalis esse debet, prodit per æquationem finitam. Sit enim parabola AP, cujus vertex principalis punctum A, umbilicus punctum S; & ducenda sit recta SP, abscindens aream parabolicam ASP æqualem dato rectilineo. FIG. 125.

Ex puncto P ad axim demittatur ordinatim applicata PO, ponaturque AS $= a$, AR $= x$, & PO $= y$. Quia igitur spatium parabolicum APO, ex Archimedeâ parabolæ dimensione, duas tertias partes continet rectanguli circumscripti xy, erit sextuplum ejusdem spatii parabolici APO $= 4xy$. Sed spatium istud parabolicũ est summa, vel differentia areæ ASP, & trianguli PSO; summa inquam, quum punctum O cadit infra umbilicum S; differentia verò, quum cadit supra. Quare, si vocetur $4am$ rectilineum, cui area parabolica ASP æqualis esse debet, quia duplum trianguli PSO in primo casu est $xy - ay$, in secundo casu est $ay - xy$; erit in omni casu $24am + 3xy - 3ay = 4xy$, hoc est $24am - 3ay = xy$, sive etiam, multiplicatis terminis omnibus per $4a$, $96aam - 12aay = 4axy$. Est autem, ob naturam pa-

parabolæ, $4ax = yy$. Itaque, factâ substitutione, erit $96aam - 12aay = y^3$, hoc est $y^3 + 12aay - 96aam = 0$.

Cubicam istam æquationem Cartesianâ methodo facile erit geometricè construere. Capiatur enim in axe parabolæ, tum portio AC æqualis dimidio lateris recti, tum portio CG retrò versus verticem æqualis ei, quod oritur, dividendo quantitatem cognitam tertii termini $12aa$ per duplum ejusdem lateris recti. Porrò ex puncto G erigatur perpendiculum GH æquale ei, quod producitur, dividendo ultimum terminum $96aam$ per duplum quadrati, quod fit ex eodem latere recto; & circulus, qui describitur centro H, intervallo HA, secabit parabolam in puncto quæsito P.

Hæc autem constructio coincidit cū illâ, quam affert Newtonus in Principiis Philosophiæ Mathematicis, & in qua punctū G bisecat AS, estque GH $= 3m$. Nam, quum latus rectum parabolæ sit $4a$, hoc est quadruplum ipsius AS, erit AC $= 2a$, adeòque AS $=$ SC. Quumque quotiens, qui oritur, dividendo $12aa$ per $8a$ fit $\frac{3}{2}a$; erit CG $= \frac{3}{2}a$, atque adeo punctū G bisecabit ipsam AS. Et denique, quia id, quod producitur, dividendo $96aam$ per $32aa$, est $3m$; erit GH $=$

$= 3m$, prorſus ut in conſtructione Newtonianâ. Unde cui nota eſt Carteſiana æquationes conſtruendi methodus, is in conſtructione Newtonianâ nullam difficultatem inveniet.

CAP. V.

De motu æquabili corporum in orbibus circularibus.

VIdimus ſuperiùs, quod ſi corpus gyretur in circumferentiâ circuli, vi tendente ad ipſum circuli centrum, ita ut motus ejus, propter æquales ſectores, quos æqualibus temporibus deſcribit, ſit æquabilis, ac uniformis; vis, qua illud urgetur, ſit itidem conſtans, & æquabilis. Nec equidem res aliter eſſe poteſt, quia quotieſcumque vis ad centrum circuli dirigitur, corpus in omni loco eandem habet diſtantiam à centro virium; nec proinde aliquid in causâ eſſe poteſt, ut majori vi urgeatur in uno loco, quàm in alio.

Verum etſi conſtans, & æquabilis ſit vis, qua urgetur corpus, motum æquabiliter in circumferentiâ circuli, non hinc tamen putandum eſt, æquales inter ſe eſſe vires, quibus urgentur duo corpora, diverſas circulorum circumferentias æquabili motu deſcribentia. Poſſunt ſiquidem eſſe in aliquo

caſu

casu æquales; sed nihil vetat, quin interdum servent inter se aliam rationem, quàm æqualitatis.

Id igitur ut pleniùs constet, ostendendum est Nobis hoc theorema, quod corporum, quæ diversos circulos æquabili motu describunt, vires centripetæ sint inter se, ut sunt arcuum simul descriptorum quadrata, applicata ad radios circulorum; hoc est in ratione compositâ ex duplicatâ arcuum, quos simul describunt, directâ, & ex simplici radiorum, aut etiam diametrorum inversâ.

Neque verò difficile erit theorema istud ostendere. Sunt enim vires istæ, ut arcuum æqualibus temporibus quamminimis descriptorum sinus versi, utpote dimetientes translationes corporum de tangentibus rectilineis in orbes circulares; adeòque, ut quadrata arcuum eorundem, ad diametros circulorum applicata, quum ii arcus non differant à suis chordis. Jam verò, propter motus æquabilitatem, sunt iidem arcus, ut arcus, temporibus quibusvis æqualibus descripti; & diametri sunt, ut eorum radii. Quare eædem vires erunt inter se, ut arcuum quorumvis simul descriptorum quadrata, applicata ad radios circulorum.

Et quoniam in motu æquabili velocita-

tes

ces mobilium ſunt, ut ſpatia, quæ æqualibus temporibus deſcribuntur; proinde arcus illi ſimul deſcripti erunt, ut velocitates corporum; Unde eorum vires centripetæ erunt etiam, ut velocitatum quadrata, applicata ad radios circulorum; hoc eſt in ratione compoſitâ ex duplicatâ velocitatum directâ, & ſimplici radiorum inversâ.

Quin etiam, quia velocitates ſunt, ut circumferentiæ, ſive radii directè, & tempora periodica inversè; eædem vires corporum centripetæ, quæ ſunt, ut quadrata velocitatum applicata ad radios circulorum, erunt quoque reciprocè, ut quadrata temporum periodicorum, applicata ad eoſdem radios; hoc eſt in ratione compoſitâ ex ſimplici radiorum directâ, & duplicatâ temporum periodicorum inversâ.

Hinc, ſi vires corporum centripetæ, ſive gravitatis vocentur G, & g; eorum velocitates V, & u; tempora piriodica T, & t; ac denique radii circulorum R, & r; habebitur, ut G ad g, ita $\frac{VV}{R}$ ad $\frac{uu}{r}$, & ita $\frac{R}{TT}$ ad $\frac{r}{tt}$. Unde, quum ſit etiam, ob legem motus æquabilis, ut V ad u, ita $\frac{R}{T}$ ad $\frac{r}{t}$; facile nobis erit, tribus hiſce analogiis defini-

nire relationem, quam habent inter se vires corporum, quæ diversos circulos æquabili motu describunt.

Nimirum primò, si tempora periodica T, & *t* æquentur: & propterea velocitates V, & *u* sint, ut radii R, & *r*; erunt etiam vires centripetæ gravitatis G, & *g*, ut radii R, & *r*. Et contra, si vires G, & *g* sint in ratione radiorum R, & *r*; tempora periodica T, & *t* æquabuntur inter se; atque adeò velocitates V, & *u* erunt, ut radii R, & *r*.

Secundò, si tempora periodica T, & *t* sint in radiorum R, & *r* ratione subduplicatâ; ita, ut velocitates V, & *u* sint in eâdem radiorũ subduplicatâ ratione; æquales erunt inter se vires centripetæ G, & *g*. Et vicissim, si vires G, & *g* sint æquales; erunt in subduplicatâ ratione radiorum R, & *r*, tum tempora periodica T, & *t*, tum velocitates V, & *u*.

Tertiò, si tempora periodica T, & *t* sint, ut radii R, & *r*: ita, ut æquales inter se sint velocitates V, & *u*; vires centripetæ G, & *g* erunt reciprocè, ut radii R, & *r*. Et è converso, si vires G, & *g* sint in reciprocâ ratione radiorum R, & *r*; tempora periodica T, & *t* erunt, ut ipsi radii R, & *r*; velocitates autem V, & *u* æquales erunt inter se.

Quartò si tempora periodica T, & *t* sint

in

in ratione sesquiplicatâ radiorum R, & r, (qui casus obtinet in corporibus cœlestibus:) & propterea velocitates V, & u reciprocè in ratione eorundem radiorum subduplicatâ; erunt vires gravitatis G, & g reciprocè, ut quadrata radiorum R, & r. Et vicissim, si vires G, & g servent inter se duplicatam rationem radiorum R, & r; erunt in eorundem radiorum ratione sesquiplicatâ directâ tempora periodica T, & t; & ratione subduplicatâ reciprocâ velocitates V, & u.

Generaliter autem, si tempora periodica T, & t sint, ut radiorum potestates quælibet R^n, & r^n: & propterea velocitates V, & u reciprocè, ut R^{n-1}, & r^{n-1}; erunt vires G, & g reciprocè, ut eorundem radiorum potestates R^{2n-1}, & r^{2n-1}. Et contra, si vires sint, ut istæ radiorum potestates reciprocè; erunt in alia ratione, tam tempora periodica, quàm velocitates.

Patet igitur corporum, diversos circulos æquabili motu describentium, vires centripetas gravitatis tunc demum æquales esse inter se, quum tempora periodica sunt in ratione subduplicatâ radiorum, adeòque velocitates, ut ipsa tempora. Verùm, si tempora periodica aliam inter se mutuò servent rationem; tunc & ipsæ vires aliam inter se rationem, quàm æqualitatis, obtinebunt.

Sed circa motum æquabilem corporum in orbibus circularibus plura alia occurrunt observatu digna, quæ breviter hoc capite prosequemur. Itaque sit ABC circuli
Fig. 126. circumferentia, quam circa centrum virium S describit corpus motu æquabili. Cõtingat eam in puncto aliquo A recta AF, & sumpto arcu indefinitè parvo AB, ducatur BD ipsi AS parallela, sive etiam compleatur rectangulum ADBE; jamque spatium, quod describitur vi contripetâ, interea ac corpus fertur per arculum AB, est AE, sive DB.

Hinc autem facile erit ostendere elegans istud theorema, quod arcus, quem corpus in circulo, datâ vi centripetâ uniformiter revolvendo, tempore quovis describit, medius sit proportionalis inter diametrum circuli, & spatium, quod idem corpus eodem tempore datâ illâ vi, uniformiter applicatâ, cadendo percurrit. Dividatur etenim tempus datum, quod voco t, in plures particulas quamminimas, & æquales. Et siquidem AB sit arcus, qui in primâ istius temporis particulâ describitur; erit AE, sive DB spatium, quod urgente vi centripetâ eâdem temporis particulâ percurritur.

Jam, propter circulum, AC, AB, BD sunt continuè proportionales. Itaque, quum in continuâ analogiâ sint etiam 1, t, tt;

erunt,

erunt, factâ mutuâ terminorum multiplicatione, continuè itidem proportionales AC, tAB, ttBD. Est autem tAB arcus, quem corpus motu æquabili describit in circulo tempore t; & ttBD spatium, quod percurritur eodem tempore t datâ vi centripetâ uniformiter applicata: nam, sicuti in motu æquabili spatia sunt in ratione temporum simplici; ita in motu uniformiter accelerato eadem spatia sunt in ratione temporum duplicatâ. Quare arcus datâ vi centripetâ æquabiliter in circulo descriptus erit medius proportionalis inter diametrum circuli, & spatium, quod eodem tempore eâdem illâ vi uniformiter applicatâ percurritur.

Hujus theorematis beneficio facile modò erit, datâ vi centripetâ, invenire altitudinem AO, unde descendere debet grave corpus, quo vi illâ uniformiter agente talem in A acquirat velocitatem, ut possit eâ velocitate describere circumferentiam circuli ABC. Nam, quum motus in circulo sit æquabilis, & descensus per AO sit motus æquabiliter acceleratus; per ea, quæ superiùs ostensa sunt, liquet corpus æquali tempore in circulo latum describere arcum duplum ipsius AO. Est autem, per ostensum theorema, arcus iste medius proportionalis inter AC, & AO. Itaque erit ut AC ad

 2AO,

2AO,ita 2AO ad AO; & propterea erit AO æqualis quartæ parti diametri AC.

Itaque velocitas, quæ requiritur ad describendam circuli circumferentiam æquabili motu datâ vi centripetâ, tanta esse debet, quanta acquiritur, cadendo per altitudinem æqualem quartæ parti diametri, vi illâ centripetâ uniformiter in corpus agente. Quocirca, si vis gravitatis in corporibus terrestribus constans sit, & uniformis, quemadmodum jam à Galilæo suppositum fuit, & multiplici experientiâ comprobatum; describet grave aliquod corpus circa telluris centrum propriâ suâ gravitate datam circuli circumferentiam, si utiq; in motu suo circulari tantam habuerit velocitatem, quantam sibi comparasset, siquidem descendisset proprio pondere per altitudinem, quæ adæquet semissem distantiæ corporis à centro telluris, ad quod vis ejus gravitatis dirigitur.

Huic eidem theoremati innititur calculus, quo invenit Newtonus, lunam spatio unius minuti primi describere vi suâ pedes Parisienses quindecim cum unâ parte duodecimâ; atque adeò vim ipsam, qua luna revolvitur circa terram, non differre à vi gravitatis corporum terrestriũ. Nam, assumptâ lunæ à terrâ distantiâ semidiametrorum terrestrium sexaginta, quia lunaris periodus re-

respectu fixarum perficitur spatio dierũ viginti septem, horarum quinque, & quadraginta trium minutorum; terræque ambitus est pedum parisiensium 123249600, uti à Piccarto mensuratore Gallo est definitum; dabitur secundùm hæc elementa arcus, quem luna in orbe suo, quem circularẽ assumimus, describit spatio unius minuti primi. Atqui inito calculo medius proportionalis inter arcum istum, & diametrum orbitæ lunaris, cui æquale esse debet spatium vi lunæ describendum eodem tempore minuti primi, invenietur pedum parisiensium quindecim cum unâ parte duodecimâ.

Præterea ex eo, quod effectus vis centripetæ in quolibet orbe sit translatio corporis de tangente in orbem, comparari potest vis centripeta, quam corpus habet in quolibet suo orbitæ loco, ad vim centripetam, quam haberet, si utique eodem in loco, eâdem velocitate, æquabiliter in circulo æquicurvo revolveretur. Revolvatur etenim corpus aliquod in orbe APQ vi tendente ad centrum S, sitque in loco P recta Pπ radius curvaturæ. Tangat porrò in P orbem illum recta PR, ad quam ex centro virium S demittatur perpendiculum SY. Dico, quod si PS exponat vim centripetam corporis tendentem ad S, exponi debeat per SY vis centripeta tendens ad π, qua urgente idem cor- Fig. 117.

 pus

pus eâdem velocitate describet circulum æquicurvum orbi in loco P.

Capiatur namque in orbe APQ portio indefinitè parva PQ, quæ nempe communis sit tam orbi, quàm circulo æquicurvo. Et quoniam circulus iste æquicurvus describitur eâdem velocitate, quam corpus in orbe APQ motum habet in P; percurretur propterea arcus ille PQ eodem tempore quamminimo, sive corpus gyretur in orbe APQ, sive etiam in circulo æquicurvo. Jam verò ducta recta Qxu tangenti PR parallelâ, quæ conveniat cum PS in puncto x, & cum Pn in puncto u, est Px effectus vis centripetæ tendentis ad S, & Pu effectus vis centripetæ tendentis ad n. Itaque, quum effectus isti à suis causis in eodem tempore producantur, erit ut vis tendens ad S ad vim tendentem ad n, ita Px ad Pu. Est autem, propter triangula similia Pxu, PSY, ut Px ad Pu, ita PS ad SY. Quare erit ex æquali, ut vis tendens ad S ad vim tendentem ad n, ita PS ad SY; & propterea exponente PS vim, quæ tendit ad S, exponet SY vim, quæ tendit ad n.

Atque hinc modò haud difficile quoque erit, rationem determinare, quam habet velocitas corporis in quolibet suo orbitæ loco, ad velocitatem, quam utique haberet, si circa idem centrum virium, eâdem vi centri-

centripetâ, in eâdem diſtantiâ, circulariter moveretur. Moveatur etenim corpus aliquod in orbe APQ vi centripetâ tendente ad S, & velocitas ejus in loco P dicatur V. Vocetur porrò *u* velocitas, qua corpus urgente eâdem vi centripetâ, in eâdem diſtantiâ PS, moveri poteſt æquabiliter in circulo. Et iiſdem ut ſupra manentibus, dico fore, ut VV ad *uu*, ita rectangulum ex P*n* in SY ad PS quadratum.

Conſtat namque ex oſtenſo theoremate, quod ſi PS exponat vim centripetam tendentem ad S, exponi debeat per SY vis centripeta tendens ad *n*, qua urgente deſcribi poteſt eâdem velocitate V circulus, cujus radius ſit recta P*n*. Sed ex iis, quæ initio hujus capitis demonſtrata ſunt, notum eſt, corporum diverſos circulos deſcribentium vires centripetas eſſe in ratione compoſitâ ex duplicatâ velocitatum directâ, & ex ſimplici radiorum inversâ. Quare PS ad SY habebit rationem compoſitam ex *uu* ad VV, & ex P*n* ad PS. Subducatur utrinque ratio, quam habet P*n* ad PS; & erit, ut PS quadratum ad rectangulum ex P*n* in SY, ita *uu* ad VV; hoc eſt invertendo, ut VV ad *uu*, ita rectangulum ex P*n* in SY ad PS quadratum.

Ex eo autem, quod ſit, ut VV ad *uu*, ita rectangulum ex P*n* in SY ad PS quadratum;

perſpicuū eſt, quod ſi corpus aliquod exeat è loco P ſecundùm rectam PR datâ velocitate V, idemque urgeatur vi centripetâ tendente ad punctum S, cujus quantitas abſoluta nota ſit, ſemper determinari poſſit radiùs curvaturæ, quam orbita, à corpore deſcribenda, cogente vi illâ centripetâ, habet in loco P. Nam datâ quantitate abſolutâ vis centripetæ in loco P, & diſtantiâ à centro virium PS, dabitur etiam velocitas *u*; quum per ſuperiùs oſtenſa ea ſit, quæ acquiritur cadendo per altitudinem æqualem dimidio ipſius PS, vi illâ centripetâ uniformiter in corpus agente. Unde, ſi fiat, ut *uu* ad VV, ita quotiens, qui oritur, dividendo PS quadratum per SY, ad quartam, habebitur radius curvaturæ P*n*.

Itaque velocitas corporis in quolibet ſuæ orbitæ loco P eſt ad velocitatem, qua circumriter revolveretur in eâdem à centro virium diſtantiâ PS, in ſubduplicatâ ratione ejus, quam habet rectangulum ex P*n* in SY ad PS quadratum. Ex quo patet, quod ſi punctum P fuerit orbitæ vertex principalis, ita ut coincidat PS cum SY, tunc eædem velocitates erunt inter ſe in ſubduplicatâ ratione rectarum P*n*, PS. Unde, ſi porrò curva APQ ſit una ex ſectionibus conicis, fiet P*n* æqualis dimidio lateris recti principalis; & propterea velocitas corporis in vertice principali

pali conicæ sectionis erit ad velocitatem corporis, in eâdem distantiâ circulum describentis, in subduplicatâ ratione ejus, quam habet dimidium lateris recti principalis ad distantiam illam, sive etiam totum latus rectum ad eandem distantiam duplicatam.

Quoniam autem terminos rationis, quam habet velocitas corporis in quolibet suæ orbitæ loco P ad velocitatem corporis, circulum describentis in eâdem distantiâ PS, ingreditur radius curvaturæ Pn; non abs re erit hoc loco formulam aliquam generalem afferre, qua inveniri possit radius curvaturæ in curvis radialibus, hoc est habentibus ordinatas ad commune aliquod punctum convergentes, velut ad S. Et quoniam in iisdem terminis illius rationis reperitur, tum ordinata convergens PS, tum perpendiculum ad tangentem demissum SY; optandum esset, ut in istiusmodi formulâ valores ipsarum PS, SY, earumdemque elementa, sive differentiæ dumtaxat continerentur.

Neque verò difficile erit pro determinando radio curvaturæ talem formulam invenire. Nam, quum angulus PnQ æqualis sit angulo QPR, productâ PQ, usque donec conveniat cum perpendiculo SY in puncto y; similes erunt sectores nPQ, PYy; eritque adeò, ut Pn ad PQ, ita PY ad Yy. Est autem, ob similia triangula PQT, PSY, ut

PQ

PQ ad PT, ita PS ad PY. Quare erit ex æquali perturbando, ut $P\pi$ ad PT, ita PS ad Yy: & propterea radius curvaturæ $P\pi$ invenietur, si factum ex ordinatâ convergente PS in suam differentiam PT dividatur per Yy, quæ est differentia perpendiculi SY; hoc est positis PS $= r$, & SY $= p$, si factum ex r in dr dividatur per dp.

Hoc igitur theoremate, sive formulâ generali determinari poterit radius curvaturæ in curvis radialibus. Ita, si curva APQ sit spiralis nautica, sive logarithmica, quæ secat ordinatas omnes convergentes in dato angulo; quia datur angulus SPY, dabitur ratio, quam habet PS ad SY. Quocirca, si ratio ista fuerit, ut a ad b, iisdem ut supra manentibus, erit ut r ad p, ita a ad b; atque adeò curvæ æquatio erit $ap = br$. Unde quum, sumptis differentiis, sit $adp = bdr$; erit $dp = \frac{bdr}{a}$: & propterea fiet radius curvaturæ $P\pi$ $\left(= \frac{rdr}{dp}\right) = \frac{ardr}{bdr}$, hoc est $= \frac{ar}{b}$. Ex quo facile constabit, spiralis nauticæ evolutam esse eandem spiralem in aliâ positione.

Sed nolim hìc silentio præterire, ex hoc theoremate aliam nobis subnasci formulam generalem pro determinandâ vi centripetâ, quæ requiritur, ut corpus revolvi possit in or-

orbe dato. Est enim ob quartam earum formularum, quas attulimus capite tertio, vis centripeta in loco P, ut distantia PS directè, radius curvaturæ Pn inversè, & cubus perpendiculi SY etiam inversè. Quocirca, quum radius curvaturæ Pn prodeat, dividendo factum ex PS in PT per Yy; eadem vis centripeta in loco P erit, ut Yy directè, PT inversè, & cubus ex SY etiam inversè; hoc est, iisdem ut supra symbolis manentibus, reciprocè ut quotiens, qui oritur, dividendo p^3dr per dp.

Ut, si curva APQ sit ellipsis, cujus S umbilicus unus, & H umbilicus alter; quia constat ex conicis, rectas PS, PH æquales cum tangente PR angulos constituere, itemque factum ex perpendiculis, quæ ex umbilicis S, & H ad eandem tangentem demittuntur, æquale esse quadrato semiaxis conjugati: propterea, si manente PS $= r$, & SY $= p$, vocetur a axis major ellipsis, & $4c$ ejus latus rectum, fiet curvæ æquatio $app - rpp = acr$. Unde, quia divisâ utrâque parte æquationis per rpp, iisdemque differentiatis, & differentiis debitè reductis, habetur $2crrdp = p^3dr$; erit $2crr$ quotiens, qui oritur, dividendo p^3dr per dp; atque adeò vis centripetâ in loco P erit reciprocè, ut $2crr$; hoc est, neglectâ constante $2c$, reciprocè, ut rr, sive PS quadratum.

Si

Si manente umbilico S, migret umbilicus alter H ad partem oppositam respectu ipsius S; ellipsis vertetur in hyperbolam, & curvæ æquatio erit $app + rpp = acr$. Sed, si alter ille umbilicus H abeat in infinitum, tunc ellipsis mutabitur in parabolam. Et, quia longitudo axis majoris a fit infinita, terminus rpp evanescit respectu alterius app; eritque adeò curvæ æquatio $app = acr$, hoc est $pp = cr$. Verùm in omni casu, non secus ac superiùs ostensum est, reperietur vis centripeta in puncto P reciprocè proportionalis quadrato distantiæ PS.

Nec reticebimus hoc loco id, quod nuper accepimus ex Acutissimo Mathematico P. Cœlestino Rollio, qui in Pisano Lyceo publicè Physicam profitetur; alterius hujus formulæ beneficio, nempe quod vis cētripeta sit reciprocè, ut quotiens, qui oritur, dividendo p^3dr per dp, nullo negotio ex datâ lege vis centripetæ determinari posse relationem, quam habet r ad p, hoc est PS ad SY; ac proinde per methodum tangentium inversam exhiberi curvam, quæ datâ vi centripetâ describi possit. Ita, si ponamus vim centripetam esse reciprocè, ut quadratum distantiæ PS; quotiens, qui oritur, dividendo p^3dr per dp erit, ut rr. Unde, si quantitas $2c$ talis sit, ut habeatur in aliquo casu $p^3dr = 2crrdp$, obtinebit æquatio ista in omni ca-

casu, eritque semper $p^3 dr = 2crrdp$.

Jam, divisâ æquationis hujus utrâq; parte per $p^3 r^3$, iisdemque integratis, erit $\frac{1}{c} = \frac{c}{pp}$, sive etiam $\frac{1}{r} + \frac{1}{a} = \frac{c}{pp}$, addendo nempe, ut moris est, integralibus quantitatem constantem. Unde, quum curvæ æquatio fiat $app + rpp = acr$, patet curvam esse ellipsim, quum quantitas illa constans est negativa; esse verò hyperbolam, quum eadem quantitas constans est positiva; & denique esse parabolam, si constans illa quantitas evanescat: id quod accidit, quum valor ipsius a fit infinitus.

Similiter, si vis centripeta fuerit, ut cubus distantiæ PS, quotiens, qui oritur, dividendo $p^3 dr$ per dp erit, ut r^3. Unde, si quantitates a, & c tales sint, ut aliquo casu habeatur $aap^3 dr = ccr^3 dp$, obtinebit æquatio ista in omni casu, eritque semper $aap^3 dr = ccr^3 dp$ curvæ differentialis æquatio. Quocirca, quia divisâ æquationis hujus utrâque parte per $p^3 r^3$, iisdemque integratis cùm additione alicujus constantis, habetur $\frac{aa}{pp} + \frac{m}{n} = \frac{cc}{rr}$, hoc est $aanrr + mpprr = ccnpp$; patet, huic hypothesi gravitatis tres

tres etiam curvas competere; unam nempe, quum quantitas illa constans est positiva; alteram, quum est negativa; & tertiã, quum evanescit: quo casu curva est spiralis nautica, quia ejus æquatio fit $ar = cp$.

Sed ut ad id, unde discessimus, iterum revertamur, vidimus velocitatem corporis in quolibet suæ orbitæ loco P esse ad velocitatem, qua circulariter revolveretur in eâdem distantiâ PS, in subduplicatâ ratione ejus, quam habet rectangulum ex P*n* in SY ad PS quadratum. Itaque, quum radius curvaturæ P*n* æqualis sit plano ex PS in PT, applicato ad Y*y*; erunt eædem velocitates inter se in subdublicatâ ratione eius, quam habet rectangulum ex SY in PT ad rectangulum ex PS in Y*y*: proindeque manentibus semper iisdem symbolis, si velocitates illæ dicantur V, & *u*; erit, ut VV ad *uu*, ita pdr ad rdp: & propterea ex datâ relatione, quam habet r ad p, dabitur ratio inter V, & *u*.

Ut si ponamus, vim centripetam gravitatis esse reciprocè proportionalem quadrato distantiæ PS, quotiens, qui oritur, dividendo p^3dr per dp, erit ut rr; adeòque si quantitas $2c$ talis sit, ut in aliquo casu habeatur $p^3dr = 2crrdp$, obtinebit æquatio ista in omni casu, eritque semper $p^3dr = 2crrdp$ curvæ differentialis æquatio. Quocir-

circa, quum sit, ut pdr ad rdp, ita $2cr$ ad pp; erit ex æquali, ut VV ad uu, ita $2cr$ ad pp; adeòque integratâ curvæ æquatione, facile erit, determinare rationem, quam habet V ad u.

Nimirum, si æquatio illa integrata det $pp = cr$, ita ut curva ipsa sit parabola; erit $2cr$ ad pp, ut 2 ad 1: proindeque V ad u erit, ut $\surd 2$ ad 1. Quod, si autem integrale ejus æquationis fuerit $app - rpp = acr$, ita ut curva ipsa sit ellipsis; erit $2cr$ ad pp, ut $2a - 2r$ ad a, hoc est in minori ratione, quàm 2 ad 1: quare V ad u minorem quoque habebit rationem, quàm $\surd 2$ ad 1. Et denique, si eadem illa æquatio integrata det $app + rpp = acr$, ita ut curva ipsa sit hyperbola; erit $2cr$ ad pp, ut $2a + 2r$ ad a, hoc est in majori ratione, quàm 2 ad 1: & propterea V ad u majorem quoque habebit rationem, quàm $\surd 2$ ad 1.

Ex his itaque consequitur, quod si corpus moveatur in sectione aliquâ conicâ APQ vi centripetâ tendente ad umbilicum S, velocitas ejus in quolibet orbitæ loco P sit ad velocitatem corporis, describentis circulum in eâdem à centro virium distantiâ PS, ut $\surd 2$ ad 1, si sectio conica fuerit parabola; in minori ratione, quàm $\surd 2$ ad 1, si sectio fuerit ellipsis; & in ratione majori, quàm $\surd 2$ ad 1, si sectio fuerit hy-

hyperbola. Sed, iisdem vestigiis insistendo, invenietur, quod si corpus in spirali nauticâ deferatur, ejus velocitas in quolibet loco spiralis æqualis sit velocitati corporis in eâdem distantiâ circulum describentis.

Quoniam autem, quum vis centripeta est reciprocè proportionalis quadrato distantiæ, velocitates corporum, diversos circulos describentium sunt reciprocè in ratione subduplicatâ radiorum; erit velocitas corporis, gyrantis circulariter in datâ qualibet distantiâ, ad velocitatem corporis gyrantis circulariter in distantiâ dimidiatâ, ut 1 ad $\sqrt{2}$. Ex quo facilè colligi potest, quod in parabolâ velocitas corporis ubique æqualis sit velocitati corporis revolventis in circulo ad dimidiam distantiam, in ellipsi minor, in hyperbolâ major.

Quæcumque verò sit sectio conica, ad quam refertur æquatio differentialis $p^3dr = 2crrdp$, illud ex iis, quæ paulò ante dicta sunt, perspicuum est, quantitatem $2c$ esse dimidium lateris recti principalis ipsius conicæ sectionis. Unde, quum sit, ut VV ad uu, ita $2cr$ ad pp; patet, velocitatem corporis, gyrantis in qualibet sectione conicâ, vi ad umbilicum tendente, esse ad velocitatem corporis, gyrantis in circulo in eâdem à centro virium distantiâ, ut est media proportionalis inter distantiam illam communem,

nem, & semissem lateris recti principalis ad perpendiculum, quod ex centro virium in tangentem sectionis demittitur.

Patet etiam, quod si velocitas corporis, gyrantis circulariter circa centrum virium S in distantiâ, quæ adæquet dimidium lateris recti principalis, hoc est $2c$, dicatur W; sit, ut V ad W, ita $2c$ ad p. Nam, ob vim centripetam, reciprocè proportionalem quadrato distantiæ, erit ut u ad W, ita $\surd 2c$ ad $\surd r$, sive etiam, ita $2c$ ad $\surd 2cr$. Est autem, ut V ad u, ita $\surd 2cr$ ad p. Quare erit ex æquo perturbando, ut V ad W, ita $2c$ ad p; hoc est, ut velocitas corporis, gyrantis in sectione conicâ, ad velocitatem corporis, gyrantis circulariter in distantiâ, quæ adæquet semissem lateris recti principalis, ut est distantia ista ad perpendiculum, ex umbilico in tangentem sectionis demissum.

Ex quo liquet ulterius, velocitatem corporis, quod movetur in sectione conicâ, vi ad umbilicum tendente, æstimari posse ubique per velocitatem corporis, gyrantis circulariter in distantiâ, semissem lateris recti principalis adæquante, ductam in exponentem rationis, quam habet ipsum latus rectum principale ad perpendiculũ, ex umbilico in tangentem sectionis demissum. Unde, quia velocitas corporis, gyrantis in circulo, cujus radius semissem lateris recti principa-

lis adæquat, ob vim centripetam, reciprocè proportionalem quadrato distantiæ, exponi potest reciprocè per radicem quadratam ejusdem lateris recti; fiet eadem velocitas corporis, in sectione conicâ moti, ut radix quadrata lateris recti principalis directè, & perpendiculum ex umbilico in tangentem sectionis demissum inversè.

Sunt igitur velocitates corporum, quæ in sectionibus conicis vi ad umbilicum tendente revolvuntur, in ratione compositâ ex subduplicatâ laterum rectorum principalium directâ, & ex simplici perpendiculorum inversâ; adeò, ut subductâ perpendiculorum ratione simplici, fient latera recta principalia in ratione compositâ ex duplicatâ perpendiculorum, & duplicatâ velocitatum. Ex quo sequitur, velocitates corporum in maximis, & minimis ab umbilico communi distantiis esse in ratione compositâ ex subduplicatâ laterum rectorum principalium directâ, & ex simplici distantiarum inversâ; quandoquidem perpendicula jam sunt ipsæ distantiæ. Nec reticebimus, quod in eâdem sectione conicâ, vel etiam in sectionibus conicis diversis, quarum latera principalia sunt æqualia, velocitas corporis ubique sit reciprocè, ut perpendiculum, demissum ab umbilico in tangentem sectionis.

Sed

Sed circa rationem, quæ est inter velocitatem corporis, gyrantis in sectione conicâ, vi ad umbilicum unum tendente, & velocitatem corporis, gyrantis circulariter in eâdem à centro virium distantiâ, illud etiam theorema præteriri non debet, quod ratio ista in ellipsi, & hyperbolâ æqualis sit rationi subduplicatæ, quam habet distantia corporis ab umbilico altero duplicata ad figuræ axem transversum. Ut enim superiùs vidimus, hæc ratio in ellipsi est, ut $\sqrt{2a-2r}$ ad $\sqrt{a}$; in hyperbolâ verò, ut $\sqrt{2a+2r}$ ad $\sqrt{a}$: & profectò, sicuti tam in ellipsi, quàm in hyperbolâ a designat longitudinem axis transversi; ita, per vulgatam umbilicorum proprietatem, distantia corporis ab umbilico altero duplicata in ellipsi est $2a-2r$, in hyperbolâ verò est $2a+2r$.

Atque hoc theorema obtinet etiam in parabolâ, in quam utique ellipsis migrare potest, umbilico altero in infinitum abeunte. Nam, ob infinitam alterius umbilici distantiam, fit distantia corporis ab eo æqualis longitudini axis transversi; adeòque velocitas corporis, gyrantis in parabolâ, vi ad umbilicum tendente, erit ad velocitatem corporis, gyrantis circulariter in eâdem à centro virium distantiâ, ut radix numeri binarii ad unitatem, hoc est, ut $\sqrt{2}$ ad 1;

 quod

quod verum esse jam superius à Nobis ostensum fuit.

Hujus autem theorematis beneficio, haud difficile modò erit in hypothesi gravitatis, reciprocè proportionalis quadrato distantiæ, determinare rationem, quam habet velocitas corporis rectà descendentis ad velocitatem corporis, gyrantis circulariter in eâdem à centro virium distantiâ. Descendat etenim corpus aliquod ad centrum virium S rectà per AS, urgente vi centripetâ, reciprocè proportionali quadrato distantiæ. Dico, velocitatem corporis in loco quolibet C esse ad velocitatem corporis, gyrantis circulariter in eâdem à centro virium distantiâ CS, in subduplicatâ ratione ejus, quam habet duplum ipsius AC ad AS, atque adeò in minori ratione, quàm $\sqrt{2}$ ad 1.

Fig. 127.

Nam, considerando rectam ACS velut ellipsim, cujus umbilici accesserunt ad vertices A, & S, per ostensum theorema erit velocitas corporis in quolibet loco C ad velocitatem corporis, gyrantis circulariter in distantiâ CS, in subduplicatâ ratione ejus, quam habet distantia corporis ab umbilico altero duplicata ad axem transversum ellipseos. Quocirca, quum axis transversus ellipseos sit ipsa AS, & distantia corporis ab umbilico altero duplicata sit duplum ipsius AC; liquet utique propositum.

Quod,

Quod, si punctum A abeat in infinitum, ita ut corpus descendat ex infinitâ distantiâ, æquales fient rectæ AC, AS; adeòque velocitas corporis in loco C erit ad velocitatem corporis gyrantis circulariter in eâdem distantiâ CS, ut est $\surd 2$ ad 1: id, quod exinde etiam liquere potest, quia puncto A in infinitum abeunte, recta ACS considerari debet, non tam velut ellipsis, quàm velut parabola, cujus latus rectum evanuit, umbilicusque adeò ad verticem accessit.

At verò, si punctum A abeat ad partem oppositam respectu puncti S, ad quod tendit vis centripeta, nimirum in a, ita ut corpus descendat ex distantiâ plusquam infinitâ; tunc velocitas corporis in loco C erit ad velocitatem corporis, quod in circulo revolvitur in eâdem distantiâ CS, in subduplicatâ ratione ejus, quam habet duplum ipsius aC ad aS, atque adeò in majori ratione, quàm $\surd 2$ ad 1. Quod exinde itidem colligi potest, quia puncto A ad partem alteram abeunte, scilicet in a, recta aCS considerari debeat velut hyperbola, cujus umbilici accesserunt ad ipsos vertices S, & a.

Nec silentio præteribimus hoc loco, quod in eâdẽ hypothesi gravitatis, corporis ex dato loco A rectâ cadentis versus centrum virium S tempus descensus comparari possit cum

tempore, quo revolveretur circulariter circa idem centrum virium S. Describatur etenim super AS semicirculus ADS, tum sectâ eâdem AS bifariam in O, & descripto centro S, intervallo SO semicirculo alio OKH, constituatur sector OSK æqualis areæ ASDA. Dico, quod corpus cadendo describet spatium AC eodem tempore, quo uniformiter gyrando describet arcum OK.

Etenim in hac hypothesi gravitatis per ea, quæ superiùs ostensa sunt, tempora revolutionum in ellipsibus sunt in sesquiplicatâ ratione axiũ majorum; adeòq; æqualia, quum ellipsium axes majores sunt æquales. Itaque, quia recta AS considerari potest velut semiellipsis, cujus umbilici ad vertices accesserunt, & semicirculus OKH tamquam semiellipsis, cujus umbilici accesserunt ad centrum; erit tempus descensus per AS æquale tempori revolutionis per semicirculum OKH.

Jam verò ex superiùs ostensis tempus descensus per AS est ad tempus descensus per AC, ut semicirculus ADS ad aream ASDA, itemque tempus revolutionis per OKH est ad tempus revolutionis per OK, ut semicirculus OKH ad sectorem OSK, hoc est ut semicirculus ADS ad aream ASDA. Quare erit ex æquali, ut tempus descensus per AS ad tempus descensus per AC, ita tempus revolu-

lutionis per OKH ad tempus revolutionis per OK: & propterea, quemadmodum tempus descensus per AS æquale est tempori revolutionis per OKH; ita erit tempus descensus per AC æquale tempori revolutionis per OK.

Hinc autem sequitur vicissim, quod si corpus descendat per AC eodem tempore, quo aliud uniformiter revolveretur per OK, sector OSK æqualis sit areæ ASDA; pariterq; quod si idem corpus velocitate acquisitâ in C pergat moveri usque ad centrum virium S per rectam CS, interea ac aliud uniformi cum motu describeret arcum HK, sector HSK æqualis sit areæ DSE. Et quoniam id verum est, ubicumque capiatur punctum A, ex quo initium habet motus corporis; obtinebit etiam, quum punctum illud A, vel abit in infinitum, vel etiam ad partem oppositam in *a*.

Et quidem, quum punctum A abit ad partem oppositam in *a*, circulus ADS fit hyperbola æquilatera: ex quo patet, quod si corpus descendat ex *a*; hoc est ex distantiâ plusquam infinitâ, in loco C talem acquirat velocitatem, ut si velocitate illâ pergat moveri usque ad centrum virium S, area DSE illius hyperbolæ æquilateræ æqualis sit sectori, quem corpus radio, dimidium recti lateris S*a* æquante, circa centrum S

uniformiter gyrando, eodem tempore describere potest.

Quod si punctum illud A abeat in infinitum, circulus ADS fiet parabola, cujus latus rectum est infinitum. Unde liquet, quod si corpus descendat ex infinitâ distantiâ, in loco C talem nanciscatur velocitatem, ut si eâ pergat moveri usque ad centrum virium S, area DSE illius parabolæ æqualis sit etiam sectori, quem corpus eodem tempore describere potest, gyrando uniformiter circa centrum virium S radio, æquante dimidium recti lateris illius parabolæ.

Jam, datâ CS, area DSE ejus parabolæ est, ut ordinata CD, hoc est in subduplicatâ ratione lateris recti; datoque tempore descriptionis, sector ille, cui æqualis est area DSE, est ut velocitas, qua describitur directè, & radius sectoris inversè, adeòque etiam in subduplicatâ ratione lateris recti. Quocirca, si latus rectum illius parabolæ eò usque minuatur, donec finitum evadat; quia, tam area DSE, quàm sector prædictus minuuntur in ratione illâ subduplicatâ, manebunt adhuc æquales inter se.

Ex quibus modò facile erit, corporis de loco dato sursum, vel deorsum projecti definire tempora ascensus, vel descensus, quum urgetur vi centripetâ reciprocè proportiona-

li quadrato distantiæ. Exeat enim corpus de loco dato C secundùm rectam ACS cum velocitate quacumque. In duplicatâ ratione hujus velocitatis ad uniformem illam, qua corpus revolveretur circulariter in distantiâ CS; cape duplum ipsius AC ad AS; jamque si ratio illa minor sit, quàm 2 ad 1, punctum A reperietur supra punctum S in distantiâ finitâ; quod si verò ratio illa æqualis fuerit ei, quam habet 2 ad 1; abibit punctum A in infinitum; & denique, si eadem illa ratio major sit, quàm 2 ad 1, reperietur punctum A infrà centrum virium S, puta in *a*.

Priori casu describatur super AS semicirculus ADS; secundo casu vertice S, & axe SC describatur latere quovis recto parabola SED; & denique in tertio casu describenda est hyperbola æquilatera SED latere transverso S*a*. Tum centro S, intervallo æquante dimidium lateris recti figuræ descriptæ describatur in omni casu circulus OKH. Et siquidem ad corporis ascendentis, vel descendentis loca duo quævis G, & G erigantur perpendicula CD, GF, quæ secent descriptam figuram in D, & F; junctisque DS, FS, fiant areis DSED, FSEF æquales sectores HSK, HSI; corpus projectum describet spatium CG eodem tempore, quo describere posset arcum KI.

Cæterùm, priusquam huic capiti finem

im-

imponamus, non abs re erit, paulisper contemplari conatum centrifugum, ex circulari corporum motu oriundum. Dictum est non unâ vice, vi centripetâ detorqueri corpus de tangente in orbem, atque adeò cohiberi, ne conatu centrifugo abeat per tangentem. Itaque vis centripeta, & vis centrifuga, tum in circulo, cùm in alio quovis orbe, non secus ac actio, & reactio, inter se æquales erunt, & contrariæ: proindeque quæcumque de vi centripetâ ostensa sunt, poterunt etiam ad vim centrifugam, sive conatum excussorium applicari.

Hinc quemadmodum in circulo vis centripeta est vel directè, ut quadratum velocitatis applicatum ad radium, vel reciprocè, ut quadratum temporis applicatum ad radium; itâ in eodem circulo vis centrifuga eandem rationem obtinebit. Quocirca, si vis centrifuga dicatur C, velocitas V, tempus T, & radius R, habebitur, & $C = \frac{VV}{R}$, & $C = \frac{R}{TT}$. Quibus equidem formulis si hæc alia addatur $V = \frac{R}{T}$, quæ eruitur ex motu æquabili; jam iis mediantibus id omne poterit definiri, quod spectat ad conatum centrifugum, ex circulari corporum motu oriundum. Quod

Quod si conatus iste centrifugus comparandus sit cum propriâ corporis gravitate, recordemur oportet ejus, quod superiùs ostensum est: nempe, quod si corpus æquabiliter in circulo motum dato tempore arcum aliquem describat, spatium, quod percurreret eodem tempore sola vi centripetâ, vel centrifugâ uniformiter agente, sit tertium proportionale circuli diametro, & arcui prædicto. Hinc enim sequitur, quod si iisdem ut supra manentibus dicatur A altitudo, ex qua cadendo gravitate G, quam non variabilem, sed uniformem in præsentiarum consideramus, acquiritur velocitas V; sit ut C ad G, ita 2A ad R.

Nam, ob motum æquabilem corporis in circulo, velocitate acquisitâ in descensu per altitudinem A, describetur æquali tempore arcus duplus ipsius A; adeòque spatium, quod percurreret corpus eodem tempore, solâ vi centrifugâ, uniformiter agente, prodibit dividendo 4AA per 2R, sive etiam 2AA per R. Unde, quum causæ proportionales sint effectibus, quos eodem tempore producunt, erit ut quotiens hujus divisionis ad A, hoc est ut 2AA ad AR, sive etiam ut 2A ad R, ita C ad G. Est igitur conatus centrifugus ad gravitatem, ut duplum altitudinis A ad radium: Unde, si altitudo A adæquet quartam partem diametri, conatus

tus centrifugus æqualis erit gravitati.

Moveri poteſt corpus circulariter circa conum aliquem, nimirum, quum ſuſpenditur per filum, quod motu ſuo ſuperficiem conicam deſcribat. Sit itaq; filum AM, quod moveatur motu conico circa axem AD erectum horizonti, ita ut pondus M, quod extremitate ſuâ gerit, deſcribat circumferentiam circuli MQR. Deſignet AC vim retinentem filum AM ſub angulo DAM, jamque demiſſo ad axem AD perpendiculo CB, reſolvetur vis illa in duas alias laterales AB, CB; nec dubium eſſe poteſt, quin prior AB ſit illa, quæ oritur ex gravitate corporis M; & altera CB ea, quæ provenit à motu circulari circa punctum D. Quare, iiſdem ut ſupra ſymbolis manentibus, erit AB = G, & CB = C. Eſt autem, ut AB ad CB, ita AD ad MD. Itaque poſitis AD = B, & MD = R; erit ut C ad G, ita R ad B, hoc eſt, ut conatus centrifugus ad gravitatem, ita radius ad altitudinem coni.

Fig. 328.

Sed tempora circuitus in hoc motu conico poſſunt etiam inter ſe mutuò conferri. Nam, quum ſit, ut C ad G, ita R ad B; datâ gravitate G, erit coni altitudo, ut radius directè, & conatus centrifugus inversè. Eſt autem conatus centrifugus reciprocè, ut quadratum temporis applicatum ad radium; adeòque ratio directa radii, & inverſa

ſa

ſa conatus centrifugi componunt rationem temporis duplicatam. Itaque erit ex æquali coni altitudo in duplicatâ temporis ratione: & propterea in motu conico tempora circuitus erunt in ſubduplicatâ ratione ejus, quam habent conorum altitudines. Hiſce autem principiis inſiſtendo, facile erit oſtendere omnia Hugeniana theoremata circa motum conicum pendulorum, & ſuperfluum exiſtimo, hiſce diutiùs immorari.

CAP. VI.

De motu projectorum in orbibus mobilibus; ubi de motu Apſidum.

HUc uſque conſideravimus motum projectorum in orbibus immobilibus; ſed fieri quoque poteſt, ut moveantur corpora projecta in orbibus, qui circa centrum virium revolvuntur. Id cernere licet in motibus planetarum ſecundariorum. Nam, quum ii urgeantur non modò viribus propriis, ad ſuos primarios tendentibus, verùm etiam viribus illis, quibus & ipſi primarii urgentur verſus ſolem; fit hinc, ut cujuſque motus, ob duplicem iſtam tendentiam, ſubinde perturbetur, ut loco ellipſeos immotæ deſcribat ellipſim, cujus axis angulari motu circa primarii centrum prorſum,

ſum, vel retrorſum movetur.

De motu itaque projectorum in orbibus mobilibus acturi, illud primò conſiderabimus, quod ſemel ac corpus deſcribit orbem APQ, qui eodem tempore revolvitur circa centrum virium C, duplicem illud motum habeat, eum nempe, quo incedit in orbe ſuo, tum etiam motum ipſius orbis. Ex duplici autem hoc motu, liquet compoſitum iri motum ſecundùm lineam curvam *Apq*; proindeque perinde erit, ſi corpus in curvæ hujus perimetro immobili moveatur, quàm ſi incederet in orbe mobili APQ.

Fig. 129.

Neque verò difficile erit definire naturam alterius hujus curvæ *Apq*. Si enim fuerit C*p* æqualis CP, deſcribetur arcus A*p* eodem tempore motu compoſito, quo deſcribitur ſolo corporis motu arcus AP. Unde, quia ex theoremate Newtoniano, ſuperius à Nobis oſtenſo, proportionalis eſt tempori, tam area ACP, quàm area AC*p*; dabitur ratio, quam habet area ACP ad aream AC*p*; & propterea curvæ *Apq* accidens præcipuum hoc erit, ut ſi centro C deſcribatur arcus P*p*, ſecans tam curvam APQ in P, quàm curvam A*pq* in *p*, area ACP datam habeat rationem ad aream AC*p*.

Sed angulus ACP proportionalis etiam eſt angulo AC*p*. Nam ſi deſcribatur alter arcus Q*q* priori P*p* concentricus, & indefinitè

pro-

proximus; dabitur ratio inter areolas PCQ, pCq. Sed ratio harum areolarum eadem est, quæ arcuum QT, qt, sive etiam angulorum PCQ, pCq; quum sint æquales rectæ CP, Cp. Itaque data etiam erit ratio, quam habet angulus PCQ ad angulum pCq: & propterea, componendo, dabitur quoque ratio inter angulum ACP, & angulum ACp.

Hinc siquidem efficiendum sit, ut corpus in orbe apb revolvente circa centrum virium C perinde moveri possit, ac corpus aliud in eodem orbe APB quiescente, ita nempe, ut dum istud in orbe quiescente APB describit arcum AP, illud percurrat arcum similem, & æqualem ap in orbe revolvente apb; facile cum Celeberrimo Newtono solvetur problema, agendo semper per centrum C in plano orbis quiescentis rectam Cp, quæ ipsi CP æqualis, efficiat angulum ACp proportionalem angulo ACP; ita, ut area, quam Cp motu angulari circa C sic lata describit, proportionalis sit areæ, quam describit CP.

Sit enim $Apqr$ curva, quam punctum p modo jam exposito motum contingit. Et quoniam unà cum P revolvitur corpus, quod urgetur à vi centripetâ, tendente ad centrum C; per theorema Newtonianum erit area ACP tempori proportionalis. Quare, quum area ACp proportionalis sit areæ

ACP

ACP, area ACp etiam tempori proportionalis erit. Consistit autem hæc area in plano immoto, scilicet in eodem plano orbis quiescentis APB. Itaque poterit corpus, cogente justæ quantitatis vi centripetâ, revolvi unà cum puncto p in curvâ $Apqr$, quam punctum p describit.

Jam curva ista $Apqr$ datur, utpote genita ex curvâ APB modo dato, & constanti. Quare per formulas superiùs traditas nihil prohibet, quominus inveniatur lex vis centripetæ, qua corpus revolvi possit in curvâ $Apqr$. Et quoniam, si fiat angulus ACa æqualis angulo PCp, rectaque Ca rectæ CA æqualis, figura, quæ describitur super Ca, similis, & æqualis ipsi ACP, terminatur ad rectam Cp subinde quidem, ut punctum p sit in perimetro ipsius figuræ; perspicuum est, quod describendo corpus, unà cum puncto p, curvam immotam $Apqr$, describat etiam perimetrum orbis apb, revolventis, circa centrum C, eâ lege, ut eodem tempore, quo describitur in orbe quiescente APB arcus quilibet AP, describatur in orbe revolvente APB arcus similis, & æqualis ap.

Itaque solvetur propositum problema, si descriptâ curvâ $Apqr$ modo illo dato, & constanti, quæratur per formulas superiùs traditas lex vis centripetæ, qua corpus in cur-

curvâ illâ revolvi possit. Interim, cognitâ lege vis centripetæ, quæ requiritur ad describendum orbem quiescentem APB, facile erit, legem alterius illius vis determinare, ob pulcherrimum istud theorema, Newtono similiter ferendum acceptum, quod differentia virium, quibus corpus in orbe quiescente, & corpus aliud in eodem orbe revolvente æqualiter moveri possint, sit in triplicatâ ratione communis altitudinis inversè.

Neque verò difficile erit ostendere præclarum istud theorema. Nam, si corporum, in locis P, & p existentium, resolvantur motus singuli in binos, quorum alii versus centrum, hoc est secundùm lineas PC, pC determinentur, & alii prioribus transversi sint, & secundùm lineas ipsis PC, pC perpendiculares directionem habeant; in hypothesi, quod corpora P, & p æqualibus viribus versus centrum urgeantur, motus versus centrum æquales erunt, & motus transversus corporis p erit ad motum transversum corporis P, ut motus angularis lineæ pC ad motum angularem lineæ PC, hoc est ut angulus ACp ad angulum ACP, sive etiam ut angulus pCq ad angulum PCQ.

Hinc siquidem constituatur angulus pCo æqualis angulo PCQ, & demissis super CP, Cp perpendiculis QR, or, producatur or, usque donec conveniat cum Cq in s; quia to, oq

non differunt ſenſibiliter ab or, os, atq; adeò rs eſt ad or, ut angulus pCq ad angulū PCQ, ſive pCo; erit ex æquali, ut motus tranſverſus corporis p ad motum tranſverſum corporis P, ita rs ad or. Unde, deſignatis æqualibus corporum motibus verſus centrum per æquales lineolas pr, PR, ſi deſignet RQ motum tranſverſum corporis P, deſignabit rs motum tranſverſum corporis p: ex quo fiet, ut eodem tempore, quo corpus P motu ſuo utroque pervenit ad punctum Q, corpus alterum p per compoſitionem utriuſque ſui motus reperiatur in s.

Jam corpus p tempore illo reperitur in q. Unde conſequens eſt, ut falſa ſit poſitio, quod corpora P, & p æqualibus viribus verſus cētrum urgentur. Urgentur itaq; corpora viribus inæqualibus, eritque differentia illarum virium in dato tempore, ut lineola sq. Eſt autem, propter circulum, lineola iſta sq æqualis quotienti, qui oritur, dividendo $rs^2 - ro^2$ per compoſitam ex Cs, & Cq, hoc eſt æqualis quotienti, qui naſcitur, dividendo $tq^2 - to^2$ per duplum ipſius Cq. Itaque eadem virium differentia in dato tempore erit, ut $tq^2 - to^2$ directè, & Cq, ſive Cp inverſè.

Et quoniam, ob datum tempus, datur cum area PCQ, cum area pCq; fiet tam tq^2, quàm QT^2, ſive to^2 reciprocè proportionalis ipſi

ipsi Cp^2: unde eidem Cp^2 reciprocè etiam proportionalis erit $tq^2 - to^2$; adeòque quantitas, quæ est, ut $tq^2 - to^2$ directè, & Cp inversè, erit reciprocè, ut cubus ipsius Cp. Quare differentia virium, quibus corpus P in orbe quiescente APB, & corpus aliud p in eodem orbe revolvente apb æqualiter moveri possunt, erit in triplicatâ ratione communis altitudinis CP, sive Cp inversè.

Verùm, ut præclari hujus theorematis beneficio, ex datâ lege vis centripetæ, quæ requiritur ad describendum orbem quiescentem APB, inveniatur lex vis centripetæ, requisitæ ad describendum orbem revolventem apb, sive perimetrum curvæ $Apqr$; inquirendum est etiam, utra earum virium major est, ut sciatur, num præfata illa virium differentia, quæ est reciprocè ut cubus altitudinis CP, sive Cp, addi debeat, aut subtrahi ex vi corporis P, ut habeatur vis corporis p.

Etsi enim in schemate suppositum sit, corpus p majore vi urgeri versus centrum, quàm corpus alterum P, fieri tamen potest, ut urgeatur quandoque vi minore. Id indicat Newtonus in ipsâ sui theorematis demonstratione; sed in Tyronum gratiam necesse est, ut paulò clariùs ostendatur. Itaque in hoc negotio duo casus sunt distin-

guendi. Primus erit, quum corpus à summâ apside ad imam descendit. Alter vicissim, quum ab imâ ad summam ascendit.

In primo casu, ubi corpus à summâ apside ad imam descendit, quum motus orbis revolventis fit in consequentiâ, hoc est in eandem plagam, versus quam dirigitur motus corporis, major semper erit vis corporis moti in orbe revolvente, quàm vis corporis moti in orbe quiescente. At verò, quum motus fit in antecedentiâ; tunc, vel regreditur velocitate maiore, quàm est dupla ejus, qua progreditur linea CP, & rursus majore vi urgebitur corpus motum in orbe revolvente, quàm id, quod movetur in orbe quiescente; vel regreditur velocitate minore, & isto casu minor erit vis corporis moti in orbe revolvente, quàm ejus, quod movetur in orbe quiescente.

Omnia autem per contrarium contingent in casu secundo, ubi corpus ab imâ apside ad summam ascendit. Nam, quum orbis revolvitur in consequentiâ, minor semper erit vis corporis moti in orbe revolvente, quàm vis corporis moti in orbe quiescente. Quotiescumque verò orbis revolvitur in consequentiâ; tum, vel regreditur velocitate majore, quàm est dupla ejus, qua progreditur linea CP, & rursus minore vi urgebitur corpus motum in orbe revolvente, quàm

quàm id, quod movetur in orbe quiefcente; vel regreditur velocitate minore, & iſto casu major erit vis corporis moti in orbe revolvente, quàm ejus, quod movetur in orbe quiefcente.

Hæc omnia figillatim oftendere, fuperfluum duco. Tantùm indicabo fontes, unde eorum demonftrationes funt repetendæ. Nimirum primò erit major vis corporis, moti in orbe revolvente, quàm ejus, quod movetur in orbe quiefcente; quotiefcumque angulus ACp major eft angulo ACP. Iſto etenim cafu, quoniam angulus pCq major etiam eft angulo PCQ, fiet hinc, ut fi conftituatur angulus pCo æqualis angulo PCQ, & producatur or ufque donec conveniat cum Cq in f, reperiri debeat corpus motum in orbe revolvente in puncto f eodem tempore, quo corpus aliud motum in orbe quiefcente pervenit ad Q, fi utique æqualibus viribus verfus centrum urgeretur. Unde, quum illud reperiatur in q eodem tempore, quo iſtud pervenit ad Q, atque adeò magis accedat ad centrum; confequens eft, ut major vis centripeta in illo exiſtat, quàm in iſto.

Secundò erit minor vis corporis, moti in orbe revolvente, quàm ejus, quod movetur in orbe quiefcente, quum viciffim angulus ACp minor eft angulo ACP. Nam hoc alio

casu, quoniam angulus pCq minor est etiam angulo PCQ, constituto per contrarium ad rectam lineam CP, atque ad datum in eâ punctum C angulo, qui sit æqualis angulo pCq, peractisque in figurâ PCQ, quæ in priori casu fiebant in figurâ pCq; invenietur eodem ratiocinio non posse corpus motum in orbe quiescente reperiri in puncto Q eodem tempore, quo corpus aliud, motum in orbe revolvente pervenit ad punctum q, nisi major ei vis centripeta insit.

Ex quibus sponte suâ sequitur tertiò, vim corporis moti in orbe revolvente adæquare vim ejus, quod movetur in orbe quiescente, quum angulus ACp æqualis est angulo ACP, & consequenter angulus pCq æqualis angulò PCQ. Id autem fieri non potest, quum orbis revolvitur in consequentiâ, quia in isto casu angulus ACp major semper est angulo ACP; sed tantùm continget, quum orbis fertur in antecedentiâ, & regreditur eâ cum velocitate, quæ sit dupla ejus, qua progreditur recta CP. Nec mirùm, quia in isto casu curva $Apqr$ abit ad partem alteram respectu axis AB, fitque ipsi APB similis, & æqualis.

Itaque, sive major sit vis corporis, moti in orbe revolvente, sive major vis ejus, quod movetur in orbe quiescente, semper differen-

rentia earum virium erit reciprocè, ut cubus communis altitudinis. Sed eadem illa virium differentia in locis P, & p, vel Q, & q poterit etiam conferri cum vi, qua corpus motu circulari revolvi possit à T ad Q eodem tempore, quo corpus P in orbe immobili describit arcum PQ. Nam, quemadmodum effectus differentiæ illarum virium est recta fq, hoc est quotiens, qui oritur, dividendo $tq^2 - to^2$ per duplum rectæ Cq; ità effectus, qui gignitur à vi, requisitâ ad prædictum motum circularem, est sinus versus arcus TQ, sive to; hoc est quotiens, qui oritur, dividendo to quadratum per duplum ejusdem Cq. Unde differentia illa virium ad vim istam alteram erit, ut $tq^2 - to^2$ ad to^2, hoc est ut $gg - ff$ ad ff, si fuerit ut f ad g, ita angulus ACP ad angulum ACp.

Atque hinc modò, si orbis APB sit ellipsis, cujus C sit umbilicus unus, & $2l$ latus rectum principale, ponaturque CP, sive Cp $= a$; erit vis centripeta, qua corpus in ellipsi mobili apb revolvi potest, in omni loco p, ut $aff + lgg - lff$ directè, & a^3 inversè. Nam vis, qua corpus in ellipsi immobili APB revolvitur, in omni loco P est reciprocè, ut quadratum distantiæ CP; adeòque est, ut ff directè, & aa inversè, inque apside A, ut ff directè, & AC^2 inversè. Vis

autem, qua corpus in circulo ad distantiam AC eâ cum velocitate revolvi posset, quam corpus in ellipsi revolvens habet in A (ut ostensum est in capite antecedenti) est ad vim, quam corpus in ellipsi motum habet in A, ut dimidium lateris recti principalis $2l$ ad AC. Quare erit vis illa, ad prædictum motum circularem requisita, ut lff directè, & AC^3 inversè.

Et quoniam differentia virium in A, & a, ut mox ostensum est, est ad vim requisitam ad prædictum motum circularem; ut $gg - ff$ ad ff; erit differentia illa virium in locis A, & a, ut $lgg - lff$ directè, & AC^3 inversè. Demonstravimus autem, differentiam virium in locis A, & a esse ad differentiam virium in locis P, & p, ut est CP^3, sive a^3 ad AC^3. Itaque erit differentia virium in locis P, & p, ut $lgg - lff$ directè, & a^3 inversè. Quocircà, si ad vim, quæ est ut ff directè, & aa inversè, hoc est, ut aff directè, & a^3 inversè, addatur vis, quæ est, ut $lgg - lff$ directè, & a^3 inversè; orietur vis, quæ erit, ut $aff + lgg - lff$ directè, & a^3 inversè, eaque erit illa, qua corpus in ellipsi mobili apb habet in loco p.

Sed monitum Lectorem hoc loco velim, quod etsi determinatio concepta videatur in eo casu, ubi major est vis corporis moti in orbe revolvente apb, quàm ejus, quod move-

vetur in orbe quiescente APB, eadem tamen locum habeat etiam in casu contrario; ut hinc generaliter verum sit, vim centripetam, qua corpus revolvitur in ellipsi mobili apb, esse in omni loco p, ut est $aff + lgg - lff$ directè, & a^3 inversè. Cujus rei ratio exinde repetenda est, quia quum per contrarium major est vis corporis moti in orbe quiescente, quàm ejus, quod movetur in orbe revolvente, angulus ACp minor est angulo ACP; adeòque $lgg - lff$, utpote quantitas negativa, non auget, sed minuit valorem ipsius aff.

Jam, si supponamus orbem ellipticum apb esse circulo valde finitimum, haud difficile modò erit ex datâ lege vis centripetæ determinare moum apsidum, hoc est rationem, quam habet f ad g, sive angulus ACP ad angulum ACp. Poterit namque problema resolvi, faciendo, ut orbis Apqr, quem corpus in ellipsi revolvente motum describit, accedat ad formam orbis, cujus apsides requiruntur, & inveniendo apsides orbis sic descripti. Quum enim orbes ad eandem accedant formam, quotiescumque vires centripetæ, quibus describuntur, in æqualibus à centro distantiis proportionales sunt; determinabitur ratio inter f, & g, hoc est motus apsidum quæsitus, conferendo terminos, exprimentes datam legem vis centri-

tripetæ, cum iis, quibus eadem vis centripeta generaliter paulò ante determinata est.

Verum, ut hæc collatio apposite fiat, vocetur t maxima altitudo, sive distantia AC, & x differentia ipsarum AC, & CP: ita, ut a, quæ repræsentat distantiam indeterminatam CP, sit $t - x$; & vis, quam in ellipsi mobili apb habet corpus in loco p, sit ut $tff - xff + lgg - lff$ directè, & a^3 inversè; hoc est ut fractio, quæ habet $tff - xff + lgg - lff$ pro numeratore, & a^3 pro denominatore. Sic enim satis erit, valorem datæ vis centripetæ reducere ad similem fractionem, hoc est ad talem, quæ habeat similiter a^3 pro suo denominatore, & tantùm conferre inter se mutuò terminos numeratorum, nempe datos cum datis, & ignotos cum ignotis.

Rem uno, aut altero exemplo illustremus. Ponamus, vim centripetam uniformem esse, adeòque proportionalem quotienti, qui oritur, dividendo a^3, sive $t^3 - 3ttx + 3txx - x^3$ per a^3. Conferendi sunt igitur termini istius quantitatis $t^3 - 3ttx + 3txx - x^3$ cum terminis hujus $tff - xff + lgg - lff$, hoc est t^3 cum $tff + lgg - lff$, & $3ttx - 3txx + x^3$ cum xff. Erit itaque, ut t^3 ad $tff + lgg - lff$, ita $3tt - 3tx + xx$ ad ff. Jam verò, ob orbem ellipticum circulo quammaximè finitimū, æquales sunt ferè t,

& l,

& t, itemque x negligi poteſt. Quare erit, ut $t3$ ad lgg, ita $3tt$ ad ff, hoc eſt ut tt ad gg, ita $3tt$ ad ff: unde fiet, ut f ad g, hoc eſt ut angulus ACP ad angulum ACp, ita $\surd 3$ ad 1: proindeque corpus, quod cum vi centripetâ uniformi revolvitur in orbe propemodum circulari, inter apſidem ſummam, & apſidem imam conficiet angulum, qui erit ad duos rectos, ut 1 ad $\surd 3$.

Ponamus ſecundò, vim centripetam eſſe reciprocè, ut a^2, adeòque proportionalem quotienti, qui oritur dividendo a, ſive $t - x$ per a^3. Conferendi ſunt itaque termini iſtius quantitatis $t - x$ cum terminis hujus $tff - xff + lgg - lff$, hoc eſt t cum $tff + lgg - lff$, & x cum xff. Erit itaque, ut t ad $tff + lgg - lff$, ita 1 ad ff; hoc eſt, propter orbem ellipticum propemodum circularem, ut t ad lgg, ita 1 ad ff; ſive etiam, ut 1 ad gg, ita 1 ad ff. Unde fiet f ad g, hoc eſt angulus ACP ad angulum ACp in ratione æqualitatis: id, quod oſtendit, non poſſe corpus urgeri vi centripetâ reciprocè proportionali quadrato diſtantiæ, niſi vel ipſe orbis quieſcat, vel etiam regrediatur cum velocitate duplâ ejus, qua progreditur recta corpus deferens.

Sed generaliter, ſi ponamus vim centripetam proportionalem eſſe a^n, hoc eſt poteſtati ipſius diſtantiæ a, cujus exponens ſit nu-

numerus n, sive integer, sive fractus, sive positivus, sive negativus; invenietur reducendo a^n, sive $\overline{t - x}^n$ ad seriem infinitam, esse, ut f ad g, hoc est, ut angulus ACP ad angulum ACp, ita $\sqrt{\overline{n + 3}}$ ad 1: & propterea inter apsidem summam, & apsidem imam conficiet corpus angulum, qui sit ad duos rectos in subduplicatâ ratione ejus, quam habet 1 ad $n + 3$. Unde si vis centripeta fuerit reciprocè proportionalis cubo distantiæ, quia n fit -3, atque adeò $n + 3$ idem est, ac zero; perficiet corpus revolutiones infinitas, donec ab apside summa perveniat ad apsidem imam.

Hinc vicissim ex dato motu apsidum colligere licet legem vis centripetæ. Sic motus lunaris apogei singulis revolutionibus est graduum trium, & minutorum trium in consequentiâ. Unde, calculo inito, invenietur, quod si distantia lunæ à centro terræ sit ad semidiametrum telluris, ut d ad 1, vis, à qua motus talis oriatur, sit reciprocè ut ea potestas ipsius d, cujus index est $\frac{490}{243}$, hoc est in ratione distantiæ paulò majore, quàm duplicatâ inversè, sed quæ partibus $59\frac{3}{4}$ propiùs ad duplicatam, quàm tripli-

ca-

çatam accedit. Hinc ex ipso motu lunaris apogei colligi potest, vim, qua luna retinetur in orbe suo, esse reciprocè, ut quadratum distantiæ locorum ab ipsius centro. Nam excessus ille supra duplicatam oritur ab actione solis; proindeque, neglectâ solis actione, vis reliqua, qua luna retinetur in orbe, erit reciprocè, ut d^2.

Hæc methodus determinandi motum apsidum, hoc est rationem, quam habet f ad g, sive angulus ACP ad angulum ACp, per comparationem terminorum, exprimentium datam legem vis centripetæ, cum iis, quibus eandem vim centripetam generaliter designavimus, debetur Viro summo, numquam satis laudando, Isaaco Newtono. Sed nolim hìc silentio præterire methodum alteram, excogitatam ab Egregio Mathematico Jacobo Hermanno, quæ hoc idem præstat canone generali, quæcumque fuerit lex vis centripetæ.

Nimirum, si generaliter vis centripeta in omni loco p ellipsis mobilis apb fuerit, ut quantitas aliqua p ex datis, & variabili a utcumque composita directè, & a^3 inversè, quia eadem vis centripeta est etiam, ut $aff + lgg - lff$ directè, & a^3 inversè; erit $p = aff + lgg - lff$. Unde, si porrò decrementum infinitesimum magnitudinis p dicatur qda, erit $qda = ffda$, hoc est $q = ff$. Jam ve-

verò, propter orbem ellipticum propemodum circularem, æquales sunt ferè a, & l; adeòque pro æquatione $p = aff + lgg - lff$, usurpari potest hæc alia $p = lgg$. Itaque erit, ut p ad q, ita lgg ad ff, sive etiam, ut p ad ql, ita gg ad ff. Unde eruitur canon Hermanni, nempe, quod g sit ad f, ut $\surd p$ ad $\surd ql$, sive etiam, ut $\surd p$ ad $\surd qa$.

Ita, si vis centripeta sit constans, fiet $p = a^3$, & $q = 3aa$: unde erit, ut g ad f, ita $\surd a^3$ ad $\surd 3a^3$, hoc est ita $\surd 1$ ad $\surd 3$. Similiter, si vis centripeta sit reciprocè, ut a^2, fiet $p = a$, & $q = 1$: unde erit g ad f, ut $\surd a$ ad $\surd a$, hoc est in ratione æqualitatis. Atque ita quoque, si vis centripeta sit, ut a^n, fiet $p = a^{n-3}$, & $q = n - 3a^{n-4}$. Quare erit, ut g ad f, ita $\surd a^{n-3}$ ad $\surd n - 3a^{n-3}$, hoc est ita $\surd 1$ ad $\surd n - 3$. Quæ omnia probè conspirant cum determinationibus, quas in iisdem legibus vis centripetæ ex Newtonianâ methodo paulò ante eruimus.

MONITUM AD LECTOREM.

Vacuis paginis explendis, simulque Operis perfectioni consulens, duo hìc monitum Lectorem volo.

Primum est, quod in doctrinâ de resistentiâ solidorum, horizontaliter suspensorum, quum simpliciter prisma nomino, non aliud intelligi debeat, quàm quod talem habet basem, ut centrum gravitatis istius basis bisecet

secet ejus altitudinem. Alioqui enim falsæ essent omnes istæ propositiones, ibidem generaliter assertæ. I, quod momentum resistentiæ in prismate homogeneo æstimari possit per basim, ductam in prismatis altitudinem; & momentum ponderis per factum ex pondere in longitudinem prismatis. II, quod quum momentum resistentiæ adæquat momentum ponderis, resistentia sit ad pondus, ut longitudo ad altitudinem. III, quod maximum pondus sustinens prisma in suspensione verticali sit ad maximum pondus sustinens in suspensione horizontali, ut longitudo ad altitudinem. Et IV, quod maximum pondus sustinens prisma suspensum verticaliter sit ad maximum pondus, quod sustinet innixum duobus fulcimentis, ut est longitudo prismatis dimidiata ad ejus altitudinem.

Alterum, quod theorema illud circa spatia epicycloidalia; nempe, quod si recta FN secet epicycloidem ad rectos angulos in puncto N, portio spatii epicycloidalis interni ABFN sit ad portionem correspondentem spatii circularis ABE, ut est 2OC + OB ad OB, ostendi quoque possit in hunc modum. Nimirum portiones epicycloidis AN, AR sunt ad chordas AE, AQ, ut est 2OC ad OB. Itaque differentia illarum portionum NR erit ad differentiam chordarum EX simili- FIG. 94.95.

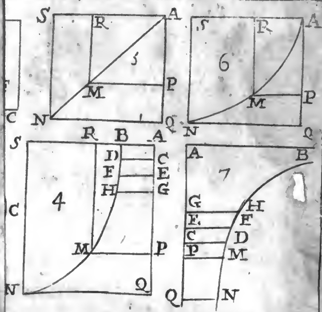
ter,

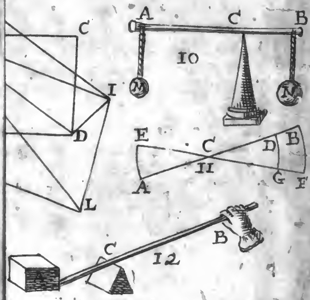
ter, ut 2OC ad OB; atque adeò componendo NR + EX erit ad EX, ut 2OC + OB ad OB. Ostensum est autem (pag. 354) FS æqualem esse ipsi EX. Itaque erit etiam NR + FS ad EX, ita 2OC + OB ad OB. Jam verò ob æquales FN, BE, trapetiolum NFGR est ad exiguum triangulum EBQ, ut NR + FS ad EX. Quare erit ex æquali, ut trapetiolum NFGR ad exiguum triangulum EBQ, ita 2OC + OB ad OB; & propterea componendo erit etiam in hac eâdam ratione spatium totum epicycloidale internum ABFN ad correspondens spatium circulare ABE.

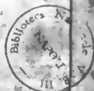
Horum primum ut Lectorem monitum facerem, Auctor fuit Vir Eximius Augustinus Arianus, qui pro suâ humanitate paginas hasce, ut edebantur, perlustrabat. Sed & alterum adjiciendum duxit insigne Mathematum decus Hyacinthus Christophorus, quem ab hac vitâ recens exemptum, maximo disciplinarum omnium detrimento, nemo est in hac urbe, qui graviter non lugeat. Nempe existimabat Vir tum rerum cognitione, cùm morum probitate omni laude major, demonstrationem ejus theorematis in opere allatam non omnibus probatam iri; adeòque aliam voluit, ut loco ejus subrogarem.

FINIS.

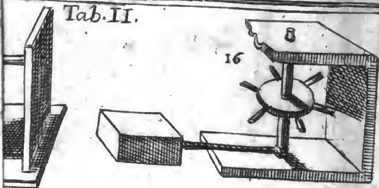


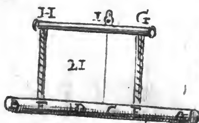

S
R
A
5
M
P
N
Q
6
4
B
D
C
F
E
H
G
7

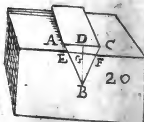

C
I
D
L
A
B
10
M
N
E
II
F
12

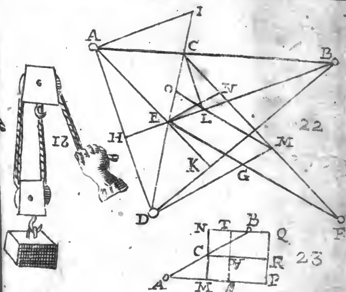

Biblioteca

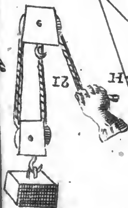
Tab. II.

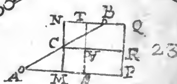








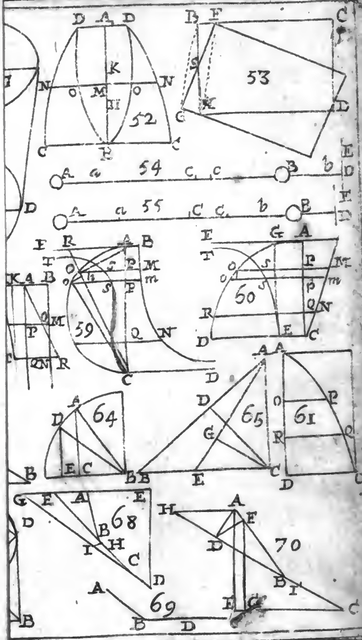











52
53
54
55
59
60
61
64
65
68
69
70



Tab. VI.

72

73

74

77

79

81

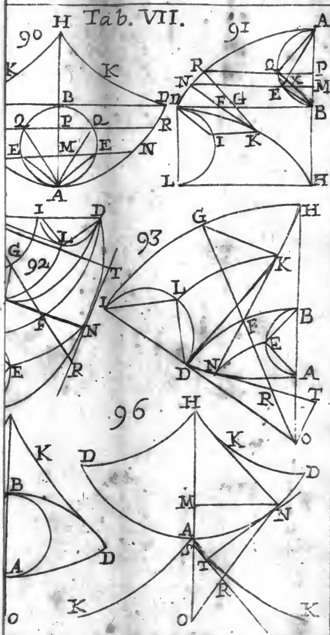
84

85

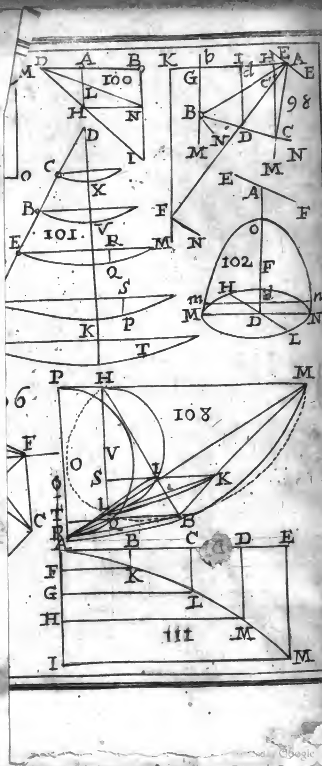
86

87

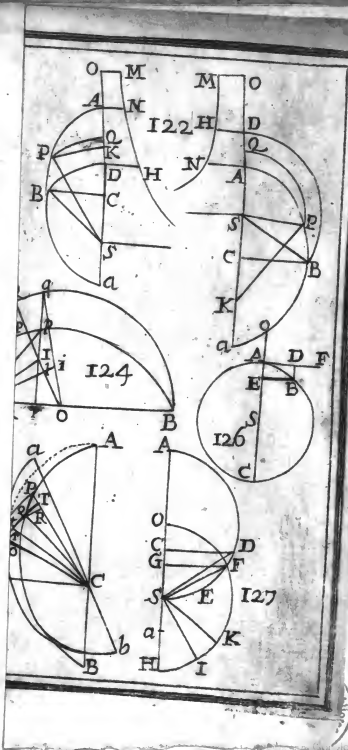



Tab. VII.
90
91
92
93
96



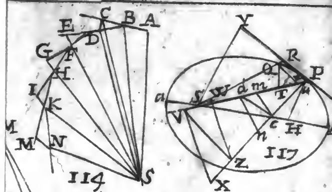

100
98
101.
102
108
111



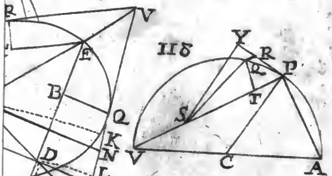


122
O M A N Q P K D H B C S a
M O H D Q N A S P C B K a
124
q p I i P O B
126
O A D F E B S C
A a P T R C b B
127
A O C D G F S E a K H I

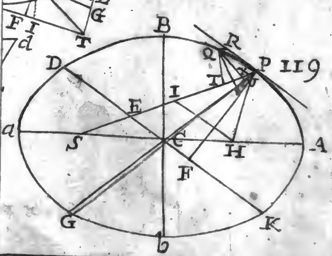




E
C
B
A
D
G
F
H
I
K
M
M
N
114
S
Y
R
P
a
S
W
d
m
T
V
c
H
n
Z
117
X



R
V
E
B
Q
K
N
D
L
G
F
I
T
118
Y
R
Q
P
T
S
V
C
A



d
B
R
Q
P
119
D
T
I
E
a
S
C
H
A
F
G
K
b


V. E. III
Nazionale